Interprétation : variables et quantificateurs

L'**interprétation** des symboles de constante, fonction et prédicat d'un langage logique s'obtient à partir d'une **structure** $\mathbf{M} = (|\mathbf{M}|, (f^{\mathbf{M}})_{f\in\mathcal{F}}, (p^{\mathbf{M}})_{p\in\mathcal{P}})$ définie par :

- d'un ensemble $|\mathbf{M}|$ non vide, appelé le domaine d'interprétation de $\mathbf{M}$
- d'une application qui associe à toute constante $k \in \mathcal{F}_0$ un élément $k^{\mathbf{M}} \in |\mathbf{M}|$
- d'une application qui associe à tout $f \in \mathcal{F}_n$ une application $f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}|^n \to |\mathbf{M}|$
- d'une application qui associe à tout $p \in \mathcal{P}_0$ un booléen $p^{\mathbf{M}} \in \mathbb{B}$
- d'une application qui associe à tout $p \in \mathcal{P}_n$ une relation $p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^n$

Etant donnée une structure $\mathbf{M}$, l'interprétation des symboles de variable de X est définie par une **valuation** $\mathrm{v} : X \to |\mathbf{M}|$.

Interprétation des formules d'un langage logique avec variables

L'**interprétation des termes** est définie par :

$$[\,]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}} : \mathcal{T}(X,\mathcal{F}) \to |\mathbf{M}| \qquad [t]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}} = \begin{cases} \mathrm{v}(x) & \text{si } t = x \in X \\ k^{\mathbf{M}} & \text{si } t = k \in \mathcal{F}_0 \\ f^{\mathbf{M}}\left([t_1]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}}, \cdots, [t_n]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}}\right) & \text{si } t = f(t_1, \cdots, t_n) \end{cases}$$

L'**interprétation des formules atomiques** est définie par :

$$\mathbf{I}_{\mathbf{M},\mathrm{V}} : \mathcal{L}(X,\mathcal{F},\mathcal{P}) \to \mathbb{B} \qquad \begin{array}{ll} (p \in \mathcal{P}_0) & \mathbf{I}_{\mathbf{M},\mathrm{V}}(p) = p^{\mathbf{M}} \\ (p \in \mathcal{P}_n) & \mathbf{I}_{\mathbf{M},\mathrm{V}}(p(t_1,\cdots,t_n)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \left([t_1]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}}, \cdots, [t_n]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}}\right) \in p^{\mathbf{M}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

L'**interprétation d'une formule logique** est définie par :

$$[\,]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}} : \mathbb{F}(X,\mathcal{F},\mathcal{P}) \to \mathbb{B}$$

$$\begin{array}{ll} [\mathsf{true}]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}} = 1 & [\neg F]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}} = \overline{[F]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}}} \\ [\mathsf{false}]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}} = 0 & [F_1 \wedge F_2]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}} = [F_1]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}} \cdot [F_2]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}} \\ [F]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}} = \mathbf{I}_{\mathbf{M},\mathrm{V}}(F) \text{ si } F \in \mathcal{L}(X,\mathcal{F},\mathcal{P}) & [F_1 \vee F_2]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}} = [F_1]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}} + [F_2]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}} \\ & [F_1 \Rightarrow F_2]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}} = \overline{[F_1]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}}} + [F_2]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} [\forall x\, F]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}} & = & \prod_{m\in|\mathbf{M}|} [F]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}[x\leftarrow m]} \\ & = & 1 \text{ si et seulement si } [F]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}[x\leftarrow m]} = 1 \text{ pour chaque } m \in |\mathbf{M}| \\ & = & 0 \text{ si et seulement si } [F]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}[x\leftarrow m]} = 0 \text{ pour au moins une valeur } m \in |\mathbf{M}| \\ [\exists x\, F]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}} & = & \sum_{m\in|\mathbf{M}|} [F]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}[x\leftarrow m]} \\ & = & 1 \text{ si et seulement si } [F]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}[x\leftarrow m]} = 1 \text{ pour au moins une valeur } m \in |\mathbf{M}| \\ & = & 0 \text{ si et seulement si } [F]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}[x\leftarrow m]} = 0 \text{ pour chaque } m \in |\mathbf{M}| \end{array}$$

$[F]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}}$ ne dépend pas des valeurs associées par v aux variables n'appartenant pas à $\mathrm{Free}(F)$: si $x \notin \mathrm{Free}(F)$, alors $[F]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}} = [F]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}[x\leftarrow m]}$ (pour tout $m \in |\mathbf{M}|$). Si F est une formule close, $[F]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}}$ ne dépend pas de v.

Une structure $\mathbf{M}$ **satisfait** une formule F si et seulement si $[F']^{\mathbf{M}}_{\mathrm{V}} = 1$ où F' est la clôture universelle de F et v est une valuation quelconque. Dans ce cas, $\mathbf{M}$ est un **modèle** de F. Une formule est **satisfiable** si et seulement si elle admet un modèle (sinon elle est **insatisfiable**) Une formule est **valide** si elle est satisfaite par toutes les structures du langage.

Deux formules $F_1, F_2 \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, sont **logiquement équivalentes**, ce que l'on note $F_1 \models\!\mid F_2$, si et seulement si, pour toute structure $\mathbf{M}$ et toute valuation v, $[F_1]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{v}} = [F_2]^{\mathbf{M}}\mathrm{v}$.

Une formule F_1 est une **conséquence sémantique** d'une formule F_2, ce que l'on note $F_2 \models F_1$, si et seulement si pour toute structure $\mathbf{M}$, et toute valuation v, si $[F_2]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{v}} = 1$, alors $[F_1]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{v}} = 1$. Lorsque Γ est un ensemble de formules on étend cette définition par : $\Gamma \models F_1$ si et seulement si pour toute structure $\mathbf{M}$ et pour toute valuation v, si $[F]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{v}} = 1$ pour toute formule $F \in \Gamma$, alors $[F_1]^{\mathbf{M}}_{\mathrm{v}} = 1$.

Proposition. $F_1 \models F_2$ si et seulement si $F_1 \Rightarrow F_2$ est valide.

Proposition. $F_1 \models\!\mid F_2$ si et seulement si $F_1 \models F_2$ et $F_2 \models F_1$.