Cours 5
Interprétation : variables et quantificateurs

Logique – Licence Informatique

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Interprétation d'un langage logique avec variables

formules de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ constituées de symboles de variable (X), de constante et de fonction ($\mathcal{F}$) et de prédicat ($\mathcal{P}$)

Interprétation d'un langage logique avec variables

formules de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ constituées de symboles de variable (X), de constante et de fonction ($\mathcal{F}$) et de prédicat ($\mathcal{P}$)

- interprétation des symboles de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{P}$
  - **structure M**

Interprétation d’un langage logique avec variables

formules de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ constituées de symboles de variable (X), de constante et de fonction ($\mathcal{F}$) et de prédicat ($\mathcal{P}$)

- interprétation des symboles de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{P}$
  - **structure M**
- interprétation des symboles de variable de X
  - les variables dénotent des objets de l’univers du discours
  - **valuation** $v : X \to |\mathbf{M}|$

Interprétation d'un langage logique avec variables

formules de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ constituées de symboles de variable (X), de constante et de fonction ($\mathcal{F}$) et de prédicat ($\mathcal{P}$)

- interprétation des symboles de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{P}$
  - **structure M**
- interprétation des symboles de variable de X
  - les variables dénotent des objets de l'univers du discours
  - **valuation** $v : X \to |\mathbf{M}|$
    associe une valeur $v(x)$ du domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$ à chaque symbole de variable x

Interprétation d'un langage logique avec variables

formules de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ constituées de symboles de variable (X), de constante et de fonction ($\mathcal{F}$) et de prédicat ($\mathcal{P}$)

- interprétation des symboles de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{P}$
  - **structure $\mathbf{M}$**
- interprétation des symboles de variable de X
  - les variables dénotent des objets de l'univers du discours
  - **valuation** $v : X \to |\mathbf{M}|$
    changer la valeur associée à une variable $w \in X$ par v (changer la valeur d'une fonction en un point)

$$\text{valuation} \quad v[w \leftarrow m] : X \to |\mathbf{M}|$$

Interprétation d'un langage logique avec variables

formules de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ constituées de symboles de variable (X), de constante et de fonction ($\mathcal{F}$) et de prédicat ($\mathcal{P}$)

- interprétation des symboles de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{P}$
  - **structure M**
- interprétation des symboles de variable de X
  - les variables dénotent des objets de l'univers du discours
  - **valuation** $v : X \to |\mathbf{M}|$
    changer la valeur associée à une variable $w \in X$ par v (changer la valeur d'une fonction en un point)

$$\begin{array}{rl} \text{valuation} & v[w \leftarrow m] : X \to |\mathbf{M}| \\ \text{définie par} & v[w \leftarrow m](x) = \begin{cases} m & \text{si } x = w \\ v(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Interprétation d'un langage logique avec variables

formules de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ constituées de symboles de variable (X), de constante et de fonction ($\mathcal{F}$) et de prédicat ($\mathcal{P}$)

- interprétation des symboles de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{P}$
  - **structure $\mathbf{M}$**
- interprétation des symboles de variable de X
  - les variables dénotent des objets de l'univers du discours
  - **valuation** $v : X \to |\mathbf{M}|$
    changer la valeur associée à une variable $w \in X$ par v (changer la valeur d'une fonction en un point)

$$\begin{array}{rl} \text{valuation} & v[w \leftarrow m] : X \to |\mathbf{M}| \\ \text{définie par} & v[w \leftarrow m](x) = \begin{cases} m & \text{si } x = w \\ v(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

exemple : si $v(x) = 3$ et $v(y) = 5$, alors $v[x \leftarrow 8](x) = 8$ et $v[x \leftarrow 8](y) = 5$

Interprétation des formules logiques avec variables

- interprétation des termes avec variables de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$
  - $[t]_v^{\mathbf{M}} \in |\mathbf{M}|$: valeur du terme t

Interprétation des formules logiques avec variables

- interprétation des termes avec variables de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$
  - $[t]_v^{\mathbf{M}} \in |\mathbf{M}|$: valeur du terme t
- interprétation des formules avec variables et quantificateurs de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$
  - interprétation des formules atomiques : $\mathbf{I}_{\mathbf{M},v} : \mathcal{L}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{B}$

Interprétation des formules logiques avec variables

- interprétation des termes avec variables de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$
  - $[t]_v^{\mathbf{M}} \in |\mathbf{M}|$: valeur du terme t
- interprétation des formules avec variables et quantificateurs de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$
  - interprétation des formules atomiques : $\mathbf{I}_{\mathbf{M},v} : \mathcal{L}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P}) \to \mathbb{B}$
  - interprétation des connecteurs logiques : opérateurs booléens

Interprétation des formules logiques avec variables

- interprétation des termes avec variables de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$
  - $[t]_v^{\mathbf{M}} \in |\mathbf{M}|$: valeur du terme t
- interprétation des formules avec variables et quantificateurs de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$
  - interprétation des formules atomiques : $\mathbf{I}_{\mathbf{M},v} : \mathcal{L}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P}) \to \mathbb{B}$
  - interprétation des connecteurs logiques : opérateurs booléens
  - interprétation des quantificateurs
    - ⋆ parcours du domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$

Interprétation des formules logiques avec variables

- interprétation des termes avec variables de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$
  - $[t]_v^{\mathbf{M}} \in |\mathbf{M}|$: valeur du terme t
- interprétation des formules avec variables et quantificateurs de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$
  - interprétation des formules atomiques : $\mathbf{I}_{\mathbf{M},v} : \mathcal{L}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P}) \to \mathbb{B}$
  - interprétation des connecteurs logiques : opérateurs booléens
  - interprétation des quantificateurs
    - ★ parcours du domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$
  - $[F]_v^{\mathbf{M}} \in \mathbb{B}$: interprétation de la formule logique F

Interprétation des termes : expressions arithmétiques

- expressions arithmétiques : $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$ ($X = \{x, y, \cdots\}$, $\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \otimes\}$)

Interprétation des termes : expressions arithmétiques

- expressions arithmétiques : $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$
  ($X = \{x, y, \cdots\}$, $\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \otimes\}$)
- domaine d'interprétation $\mathbb{Z}$ (entiers relatifs)

Interprétation des termes : expressions arithmétiques

- expressions arithmétiques : $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$
($X = \{x, y, \cdots\}$, $\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \otimes\}$)
- domaine d'interprétation $\mathbb{Z}$ (entiers relatifs)
- valuation $v : X \to \mathbb{Z}$ permettant d'interpréter les symboles de X

Interprétation des termes : expressions arithmétiques

- expressions arithmétiques : $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$ ($X = \{x, y, \cdots\}$, $\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \otimes\}$)
- domaine d'interprétation $\mathbb{Z}$ (entiers relatifs)
- valuation $v : X \to \mathbb{Z}$ permettant d'interpréter les symboles de X
  - exemple : $v(x) = 3$ et $v(y) = 5$

Interprétation des termes : expressions arithmétiques

- expressions arithmétiques : $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$
  ($X = \{x, y, \cdots\}$, $\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \otimes\}$)
- domaine d'interprétation $\mathbb{Z}$ (entiers relatifs)
- valuation $v : X \to \mathbb{Z}$ permettant d'interpréter les symboles de X
  - exemple : $v(x) = 3$ et $v(y) = 5$
- structure $\mathbf{M}$ (avec $|\mathbf{M}| = \mathbb{Z}$) permettant d'interpréter les symboles de $\mathcal{F}$

Interprétation des termes : expressions arithmétiques

- expressions arithmétiques : $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$ ($X = \{x, y, \cdots\}$, $\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \otimes\}$)
- domaine d'interprétation $\mathbb{Z}$ (entiers relatifs)
- valuation $v : X \to \mathbb{Z}$ permettant d'interpréter les symboles de X
  - exemple : $v(x) = 3$ et $v(y) = 5$
- structure $\mathbf{M}$ (avec $|\mathbf{M}| = \mathbb{Z}$) permettant d'interpréter les symboles de $\mathcal{F}$
  - chaque constante $k \in \mathcal{F}_0$ est interprétée par l'entier relatif $k^{\mathbf{M}} = k \in \mathbb{Z}$
    - exemple : la valeur de l'expression 8 est l'entier relatif 8

Interprétation des termes : expressions arithmétiques

- expressions arithmétiques : $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$ ($X = \{x, y, \cdots\}$, $\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \otimes\}$)
- domaine d'interprétation $\mathbb{Z}$ (entiers relatifs)
- valuation $v : X \to \mathbb{Z}$ permettant d'interpréter les symboles de X
  - exemple : $v(x) = 3$ et $v(y) = 5$
- structure $\mathbf{M}$ (avec $|\mathbf{M}| = \mathbb{Z}$) permettant d'interpréter les symboles de $\mathcal{F}$
  - chaque constante $k \in \mathcal{F}_0$ est interprétée par l'entier relatif $k^{\mathbf{M}} = k \in \mathbb{Z}$
    - exemple : la valeur de l'expression 8 est l'entier relatif 8
  - interprétation des symboles de fonction de $\mathcal{F}_2$
    - $\oplus : \mathcal{T}(X, \mathcal{F}) \times \mathcal{T}(X, \mathcal{F}) \to \mathcal{T}(X, \mathcal{F})$: opérateur binaire de construction d'expressions arithmétiques
    - interprété par l'opérateur binaire $\oplus^{\mathbf{M}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ d'addition de deux entiers relatifs ($\oplus^{\mathbf{M}} = +$)
    - $\ominus, \otimes$ ...

Interprétation des termes : expressions arithmétiques

- expressions arithmétiques : $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$ ($X = \{x, y, \cdots\}$, $\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \otimes\}$)
- domaine d'interprétation $\mathbb{Z}$ (entiers relatifs)
- valuation $v : X \to \mathbb{Z}$ permettant d'interpréter les symboles de X
  - exemple : $v(x) = 3$ et $v(y) = 5$
- structure $\mathbf{M}$ (avec $|\mathbf{M}| = \mathbb{Z}$) permettant d'interpréter les symboles de $\mathcal{F}$
- interprétation des termes

$$[t]_v^{\mathbf{M}} = \begin{cases} v(x) & \text{si } t = x \in X \\ & \\ & \end{cases}$$

Interprétation des termes : expressions arithmétiques

- expressions arithmétiques : $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$ ($X = \{x, y, \cdots\}$, $\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \otimes\}$)
- domaine d'interprétation $\mathbb{Z}$ (entiers relatifs)
- valuation $v : X \to \mathbb{Z}$ permettant d'interpréter les symboles de X
  - exemple : $v(x) = 3$ et $v(y) = 5$
- structure **M** (avec $|\mathbf{M}| = \mathbb{Z}$) permettant d'interpréter les symboles de $\mathcal{F}$
- interprétation des termes

$$[t]_v^{\mathbf{M}} = \begin{cases} v(x) & \text{si } t = x \in X \\ k^{\mathbf{M}} = k & \text{si } t = k \in \mathcal{F}_0 \\ & \\ & \end{cases}$$

Interprétation des termes : expressions arithmétiques

- expressions arithmétiques : $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$ ($X = \{x, y, \cdots\}$, $\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \otimes\}$)
- domaine d'interprétation $\mathbb{Z}$ (entiers relatifs)
- valuation $v : X \to \mathbb{Z}$ permettant d'interpréter les symboles de X
  - exemple : $v(x) = 3$ et $v(y) = 5$
- structure $\mathbf{M}$ (avec $|\mathbf{M}| = \mathbb{Z}$) permettant d'interpréter les symboles de $\mathcal{F}$
- interprétation des termes

$$[t]_v^{\mathbf{M}} = \begin{cases} v(x) & \text{si } t = x \in X \\ k^{\mathbf{M}} = k & \text{si } t = k \in \mathcal{F}_0 \\ \oplus^{\mathbf{M}}([t_1]_v^{\mathbf{M}}, [t_2]_v^{\mathbf{M}}) = [t_1]_v^{\mathbf{M}} + [t_2]_v^{\mathbf{M}} & \text{si } t = \oplus(t_1, t_2) \\ \dots & \end{cases}$$

Interprétation des termes : expressions arithmétiques

- expressions arithmétiques : $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$ ($X = \{x, y, \cdots\}$, $\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \otimes\}$)
- domaine d'interprétation $\mathbb{Z}$ (entiers relatifs)
- valuation $v : X \to \mathbb{Z}$ permettant d'interpréter les symboles de X
  - exemple : $v(x) = 3$ et $v(y) = 5$
- structure **M** (avec $|\mathbf{M}| = \mathbb{Z}$) permettant d'interpréter les symboles de $\mathcal{F}$
- interprétation des termes

$$[t]_v^{\mathbf{M}} = \begin{cases} v(x) & \text{si } t = x \in X \\ k^{\mathbf{M}} = k & \text{si } t = k \in \mathcal{F}_0 \\ \oplus^{\mathbf{M}}([t_1]_v^{\mathbf{M}}, [t_2]_v^{\mathbf{M}}) = [t_1]_v^{\mathbf{M}} + [t_2]_v^{\mathbf{M}} & \text{si } t = \oplus(t_1, t_2) \\ \dots & \end{cases}$$

exemple : $[\oplus(\ominus(8, x), \ominus(y, 1))]_v^{\mathbf{M}}$

Interprétation des termes : expressions arithmétiques

- expressions arithmétiques : $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$
  ($X = \{x, y, \cdots\}$, $\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \otimes\}$)
- domaine d'interprétation $\mathbb{Z}$ (entiers relatifs)
- valuation $v : X \to \mathbb{Z}$ permettant d'interpréter les symboles de X
  - exemple : $v(x) = 3$ et $v(y) = 5$
- structure $\mathbf{M}$ (avec $|\mathbf{M}| = \mathbb{Z}$) permettant d'interpréter les symboles de $\mathcal{F}$
- interprétation des termes

$$[t]_v^{\mathbf{M}} = \begin{cases} v(x) & \text{si } t = x \in X \\ k^{\mathbf{M}} = k & \text{si } t = k \in \mathcal{F}_0 \\ \oplus^{\mathbf{M}}([t_1]_v^{\mathbf{M}}, [t_2]_v^{\mathbf{M}}) = [t_1]_v^{\mathbf{M}} + [t_2]_v^{\mathbf{M}} & \text{si } t = \oplus(t_1, t_2) \\ \cdots & \end{cases}$$

exemple : $[\oplus(\ominus(8, x), \ominus(y, 1))]_v^{\mathbf{M}}$
$$= \oplus^{\mathbf{M}}([\ominus(8, x)]_v^{\mathbf{M}}, [\ominus(y, 1)]_v^{\mathbf{M}}) = [\ominus(8, x)]_v^{\mathbf{M}} + [\ominus(y, 1)]_v^{\mathbf{M}}$$

Interprétation des termes : expressions arithmétiques

- expressions arithmétiques : $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$ ($X = \{x, y, \cdots\}$, $\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \otimes\}$)
- domaine d'interprétation $\mathbb{Z}$ (entiers relatifs)
- valuation $v : X \to \mathbb{Z}$ permettant d'interpréter les symboles de X
  - exemple : $v(x) = 3$ et $v(y) = 5$
- structure **M** (avec $|\mathbf{M}| = \mathbb{Z}$) permettant d'interpréter les symboles de $\mathcal{F}$
- interprétation des termes

$$[t]_v^{\mathbf{M}} = \begin{cases} v(x) & \text{si } t = x \in X \\ k^{\mathbf{M}} = k & \text{si } t = k \in \mathcal{F}_0 \\ \oplus^{\mathbf{M}}([t_1]_v^{\mathbf{M}}, [t_2]_v^{\mathbf{M}}) = [t_1]_v^{\mathbf{M}} + [t_2]_v^{\mathbf{M}} & \text{si } t = \oplus(t_1, t_2) \\ \ldots \end{cases}$$

exemple : $[\oplus(\ominus(8, x), \ominus(y, 1))]_v^{\mathbf{M}}$

$$\begin{aligned} &= \oplus^{\mathbf{M}}([\ominus(8, x)]_v^{\mathbf{M}}, [\ominus(y, 1)]_v^{\mathbf{M}}) = [\ominus(8, x)]_v^{\mathbf{M}} + [\ominus(y, 1)]_v^{\mathbf{M}} \\ &= \ominus^{\mathbf{M}}([8]_v^{\mathbf{M}}, [x]_v^{\mathbf{M}}) + \ominus^{\mathbf{M}}([y]_v^{\mathbf{M}}, [1]_v^{\mathbf{M}}) = (8 - v(x)) + (v(y) - 1) \\ &= (8 - 3) + (5 - 1) = 9 \end{aligned}$$

Interprétation des termes de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$

- structure **M** permettant d'interpréter les symboles de $\mathcal{F}$

Interprétation des termes de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$

- structure **M** permettant d'interpréter les symboles de $\mathcal{F}$
  - domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$ (ensemble non vide)

Interprétation des termes de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$

- structure **M** permettant d'interpréter les symboles de $\mathcal{F}$
  - domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$ (ensemble non vide)
  - associe à chaque constante $k \in \mathcal{F}_0$ un élément $k^{\mathbf{M}} \in |\mathbf{M}|$

Interprétation des termes de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$

- structure $\mathbf{M}$ permettant d'interpréter les symboles de $\mathcal{F}$
  - domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$ (ensemble non vide)
  - associe à chaque constante $k \in \mathcal{F}_0$ un élément $k^{\mathbf{M}} \in |\mathbf{M}|$
  - associe à chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{F}_n$ d'arité n, une fonction n-aire $f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}|^n \to |\mathbf{M}|$

Interprétation des termes de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$

- structure $\mathbf{M}$ permettant d'interpréter les symboles de $\mathcal{F}$
  - domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$ (ensemble non vide)
  - associe à chaque constante $k \in \mathcal{F}_0$ un élément $k^{\mathbf{M}} \in |\mathbf{M}|$
  - associe à chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{F}_n$ d'arité n, une fonction n-aire $f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}|^n \to |\mathbf{M}|$
- valuation v permettant d'interpréter les symboles de X

Interprétation des termes de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$

- structure $\mathbf{M}$ permettant d'interpréter les symboles de $\mathcal{F}$
  - domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$ (ensemble non vide)
  - associe à chaque constante $k \in \mathcal{F}_0$ un élément $k^{\mathbf{M}} \in |\mathbf{M}|$
  - associe à chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{F}_n$ d'arité n, une fonction n-aire $f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}|^n \to |\mathbf{M}|$
- valuation v permettant d'interpréter les symboles de X
- interprétation des termes de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$

$$[\ ]_v^{\mathbf{M}} : \mathcal{T}(X, \mathcal{F}) \to |\mathbf{M}|$$

Interprétation des termes de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$

- structure **M** permettant d'interpréter les symboles de $\mathcal{F}$
  - domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$ (ensemble non vide)
  - associe à chaque constante $k \in \mathcal{F}_0$ un élément $k^{\mathbf{M}} \in |\mathbf{M}|$
  - associe à chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{F}_n$ d'arité n, une fonction n-aire $f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}|^n \to |\mathbf{M}|$
- valuation v permettant d'interpréter les symboles de X
- interprétation des termes de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$

$$[\ ]_v^{\mathbf{M}} : \mathcal{T}(X, \mathcal{F}) \to |\mathbf{M}|$$

$$[t]_v^{\mathbf{M}} = \begin{cases} v(x) & \text{si } t = x \in X \\ & \end{cases}$$

Interprétation des termes de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$

- structure $\mathbf{M}$ permettant d'interpréter les symboles de $\mathcal{F}$
  - domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$ (ensemble non vide)
  - associe à chaque constante $k \in \mathcal{F}_0$ un élément $k^{\mathbf{M}} \in |\mathbf{M}|$
  - associe à chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{F}_n$ d'arité n, une fonction n-aire $f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}|^n \to |\mathbf{M}|$
- valuation v permettant d'interpréter les symboles de X
- interprétation des termes de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$

$$[\ ]_v^{\mathbf{M}} : \mathcal{T}(X, \mathcal{F}) \to |\mathbf{M}|$$

$$[t]_v^{\mathbf{M}} = \begin{cases} v(x) & \text{si } t = x \in X \\ k^{\mathbf{M}} & \text{si } t = k \in \mathcal{F}_0 \\ & \end{cases}$$

Interprétation des termes de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$

- structure $\mathbf{M}$ permettant d'interpréter les symboles de $\mathcal{F}$
  - domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$ (ensemble non vide)
  - associe à chaque constante $k \in \mathcal{F}_0$ un élément $k^{\mathbf{M}} \in |\mathbf{M}|$
  - associe à chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{F}_n$ d'arité n, une fonction n-aire $f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}|^n \to |\mathbf{M}|$
- valuation v permettant d'interpréter les symboles de X
- interprétation des termes de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$

$$[\ ]_v^{\mathbf{M}} : \mathcal{T}(X, \mathcal{F}) \to |\mathbf{M}|$$

$$[t]_v^{\mathbf{M}} = \begin{cases} v(x) & \text{si } t = x \in X \\ k^{\mathbf{M}} & \text{si } t = k \in \mathcal{F}_0 \\ f^{\mathbf{M}}([t_1]_v^{\mathbf{M}}, \cdots, [t_n]_v^{\mathbf{M}}) & \text{si } t = f(t_1, \cdots, t_n) \end{cases}$$

Interprétation des formules formules atomiques

- interprétation de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{P}$: structure $\mathbf{M}$
  - domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$
  - associe à chaque constante $k \in \mathcal{F}_0$ un élément $k^{\mathbf{M}} \in |\mathbf{M}|$
  - associe à chaque $f \in \mathcal{F}_n$ une fonction n-aire $f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}|^n \to |\mathbf{M}|$
  - associe à chaque symbole $p \in \mathcal{P}_0$ un booléen $p^{\mathbf{M}} \in \{0, 1\}$
  - associe à chaque $p \in \mathcal{P}_n$ un ensemble de n-uplets $p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^n$

Interprétation des formules formules atomiques

- interprétation de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{P}$: structure $\mathbf{M}$
  - domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$
  - associe à chaque constante $k \in \mathcal{F}_0$ un élément $k^{\mathbf{M}} \in |\mathbf{M}|$
  - associe à chaque $f \in \mathcal{F}_n$ une fonction n-aire $f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}|^n \to |\mathbf{M}|$
  - associe à chaque symbole $p \in \mathcal{P}_0$ un booléen $p^{\mathbf{M}} \in \{0, 1\}$
  - associe à chaque $p \in \mathcal{P}_n$ un ensemble de n-uplets $p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^n$
- interprétation de X : valuation $v : X \to |\mathbf{M}|$

Interprétation des formules formules atomiques

- interprétation de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{P}$: structure $\mathbf{M}$
  - domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$
  - associe à chaque constante $k \in \mathcal{F}_0$ un élément $k^{\mathbf{M}} \in |\mathbf{M}|$
  - associe à chaque $f \in \mathcal{F}_n$ une fonction n-aire $f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}|^n \to |\mathbf{M}|$
  - associe à chaque symbole $p \in \mathcal{P}_0$ un booléen $p^{\mathbf{M}} \in \{0, 1\}$
  - associe à chaque $p \in \mathcal{P}_n$ un ensemble de n-uplets $p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^n$
- interprétation de X : valuation $v : X \to |\mathbf{M}|$
- interprétation des formules atomiques $\mathbf{I}_{\mathbf{M},v} : \mathcal{L}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P}) \to \mathbb{B}$

$$p \in \mathcal{P}_0 \qquad \mathbf{I}_{\mathbf{M},v}(p) = p^{\mathbf{M}}$$

$$\begin{array}{l} p \in \mathcal{P}_n \\ (n > 0) \end{array} \qquad \mathbf{I}_{\mathbf{M},v}(p(t_1, \cdots, t_n)) = \begin{cases} 1 & \text{si } ([t_1]_v^{\mathbf{M}}, \cdots, [t_n]_v^{\mathbf{M}}) \in p^{\mathbf{M}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Interprétation des quantificateurs : exemples

- langage logique : $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f\}, \mathcal{P} = \mathcal{F}_2 = \{p, q\}$

Interprétation des quantificateurs : exemples

- langage logique : $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f\}$, $\mathcal{P} = \mathcal{F}_2 = \{p, q\}$
- structure **M** de domaine $|\mathbf{M}| = \{-2, -1, 1, 2\}$

$$
\begin{array}{lll}
f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}| \to |\mathbf{M}| & p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 & q^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 \\
f^{\mathbf{M}}(x) = |x| & p^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 \leq m_2\} & q^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 < m_2\}
\end{array}
$$

Interprétation des quantificateurs : exemples

- langage logique : $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f\}$, $\mathcal{P} = \mathcal{F}_2 = \{p, q\}$
- structure **M** de domaine $|\mathbf{M}| = \{-2, -1, 1, 2\}$

$$\begin{array}{lll} f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}| \to |\mathbf{M}| & p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 & q^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 \\ f^{\mathbf{M}}(x) = |x| & p^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 \leq m_2\} & q^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 < m_2\} \end{array}$$

- formule $\forall x\, p(x, f(x))$
  - $\forall x\, p(x, f(x))$ est « vraie » ssi la formule $p(x, f(x))$ est vraie pour toutes les valeurs possibles de x

Interprétation des quantificateurs : exemples

- langage logique : $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f\}$, $\mathcal{P} = \mathcal{F}_2 = \{p, q\}$
- structure **M** de domaine $|\mathbf{M}| = \{-2, -1, 1, 2\}$

$$\begin{array}{lll} f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}| \to |\mathbf{M}| & p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 & q^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 \\ f^{\mathbf{M}}(x) = |x| & p^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 \leq m_2\} & q^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 < m_2\} \end{array}$$

- formule $\forall x\, p(x, f(x))$
  - $\forall x\, p(x, f(x))$ est « vraie » ssi la formule $p(x, f(x))$ est vraie pour toutes les valeurs possibles de x

$$[\forall x\, p(x, f(x))]^{\mathbf{M}}_v = \prod_{m \in |\mathbf{M}|} [p(x, f(x))]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow m]}$$

Interprétation des quantificateurs : exemples

- langage logique : $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f\}$, $\mathcal{P} = \mathcal{F}_2 = \{p, q\}$
- structure **M** de domaine $|\mathbf{M}| = \{-2, -1, 1, 2\}$

$$\begin{array}{lll} f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}| \to |\mathbf{M}| & p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 & q^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 \\ f^{\mathbf{M}}(x) = |x| & p^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 \leq m_2\} & q^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 < m_2\} \end{array}$$

- formule $\forall x\, p(x, f(x))$
  - $\forall x\, p(x, f(x))$ est « vraie » ssi la formule $p(x, f(x))$ est vraie pour toutes les valeurs possibles de x
  - valeurs possibles pour x avec la structure **M** : $-2, -1, 1, 2$

$$[\forall x\, p(x, f(x))]^{\mathbf{M}}_v = \prod_{m \in |\mathbf{M}|} [p(x, f(x))]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow m]}$$

Interprétation des quantificateurs : exemples

- langage logique : $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f\}$, $\mathcal{P} = \mathcal{F}_2 = \{p, q\}$
- structure **M** de domaine $|\mathbf{M}| = \{-2, -1, 1, 2\}$

$$\begin{array}{lll} f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}| \to |\mathbf{M}| & p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 & q^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 \\ f^{\mathbf{M}}(x) = |x| & p^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 \leq m_2\} & q^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 < m_2\} \end{array}$$

- formule $\forall x\, p(x, f(x))$
  - $\forall x\, p(x, f(x))$ est « vraie » ssi la formule $p(x, f(x))$ est vraie pour toutes les valeurs possibles de x
  - valeurs possibles pour x avec la structure **M** : $-2, -1, 1, 2$

$$\begin{array}{rl} & [\forall x\, p(x, f(x))]^{\mathbf{M}}_v = \prod_{m \in |\mathbf{M}|} [p(x, f(x))]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow m]} \\ = & [p(x, f(x))]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow -2]} \cdot [p(x, f(x))]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow -1]} \cdot [p(x, f(x))]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow 1]} \cdot [p(x, f(x))]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow 2]} \\ = & 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \end{array}$$

Interprétation des quantificateurs : exemples

- langage logique : $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f\}$, $\mathcal{P} = \mathcal{F}_2 = \{p, q\}$
- structure $\mathbf{M}$ de domaine $|\mathbf{M}| = \{-2, -1, 1, 2\}$

$$\begin{array}{lll} f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}| \to |\mathbf{M}| & p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 & q^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 \\ f^{\mathbf{M}}(x) = |x| & p^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 \leq m_2\} & q^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 < m_2\} \end{array}$$

- formule $\forall x\, p(x, f(x))$
  - $\forall x\, p(x, f(x))$ est « vraie » ssi la formule $p(x, f(x))$ est vraie pour toutes les valeurs possibles de x
  - valeurs possibles pour x avec la structure $\mathbf{M}$: $-2, -1, 1, 2$

$$\begin{array}{rl} & [\forall x\, p(x, f(x))]^{\mathbf{M}}_v = \prod_{m \in |\mathbf{M}|} [p(x, f(x))]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow m]} \\ = & [p(x, f(x))]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow -2]} \cdot [p(x, f(x))]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow -1]} \cdot [p(x, f(x))]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow 1]} \cdot [p(x, f(x))]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow 2]} \\ = & 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \end{array}$$

pour chaque $m \in |\mathbf{M}|$, on a $m \leq |m|$

Interprétation des quantificateurs : exemples

- langage logique : $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f\}, \mathcal{P} = \mathcal{F}_2 = \{p, q\}$
- structure $\mathbf{M}$ de domaine $|\mathbf{M}| = \{-2, -1, 1, 2\}$

$$
\begin{array}{lll}
f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}| \to |\mathbf{M}| & p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 & q^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 \\
f^{\mathbf{M}}(x) = |x| & p^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 \leq m_2\} & q^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 < m_2\}
\end{array}
$$

- formule $\forall x\, p(f(x), x)$
  - $\forall x\, p(f(x), x)$ est « vraie » ssi la formule $p(f(x), x)$ est vraie pour toutes les valeurs possibles de x

Interprétation des quantificateurs : exemples

- langage logique : $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f\}$, $\mathcal{P} = \mathcal{F}_2 = \{p, q\}$
- structure **M** de domaine $|\mathbf{M}| = \{-2, -1, 1, 2\}$

$$\begin{array}{lll} f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}| \to |\mathbf{M}| & p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 & q^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 \\ f^{\mathbf{M}}(x) = |x| & p^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 \leq m_2\} & q^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 < m_2\} \end{array}$$

- formule $\forall x\, p(f(x), x)$
  - $\forall x\, p(f(x), x)$ est « vraie » ssi la formule $p(f(x), x)$ est vraie pour toutes les valeurs possibles de x

$$[\forall x\, p(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_v = \prod_{m \in |\mathbf{M}|} [p(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow m]}$$

Interprétation des quantificateurs : exemples

- langage logique : $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f\}, \mathcal{P} = \mathcal{F}_2 = \{p, q\}$
- structure **M** de domaine $|\mathbf{M}| = \{-2, -1, 1, 2\}$

$$\begin{array}{lll} f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}| \rightarrow |\mathbf{M}| & p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 & q^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 \\ f^{\mathbf{M}}(x) = |x| & p^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 \leq m_2\} & q^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 < m_2\} \end{array}$$

- formule $\forall x\, p(f(x), x)$
  - $\forall x\, p(f(x), x)$ est « vraie » ssi la formule $p(f(x), x)$ est vraie pour toutes les valeurs possibles de x
  - valeurs possibles pour x avec la structure **M** : $-2, -1, 1, 2$

$$[\forall x\, p(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_{v} = \prod_{m \in |\mathbf{M}|} [p(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow m]}$$

Interprétation des quantificateurs : exemples

- langage logique : $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f\}$, $\mathcal{P} = \mathcal{F}_2 = \{p, q\}$
- structure $\mathbf{M}$ de domaine $|\mathbf{M}| = \{-2, -1, 1, 2\}$

$$
\begin{array}{lll}
f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}| \to |\mathbf{M}| & p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 & q^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 \\
f^{\mathbf{M}}(x) = |x| & p^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 \leq m_2\} & q^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 < m_2\}
\end{array}
$$

- formule $\forall x\, p(f(x), x)$
  - $\forall x\, p(f(x), x)$ est « vraie » ssi la formule $p(f(x), x)$ est vraie pour toutes les valeurs possibles de x
  - valeurs possibles pour x avec la structure $\mathbf{M}$: $-2, -1, 1, 2$

$$
\begin{array}{ll}
 & [\forall x\, p(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_v = \prod_{m \in |\mathbf{M}|} [p(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow m]} \\
= & [p(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow -2]} \cdot [p(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow -1]} \cdot [p(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow 1]} \cdot [p(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow 2]} \\
= & 0 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0
\end{array}
$$

lorsque $m \in |\mathbf{M}|$ est négatif, on a $|m| \not\leq m$

Interprétation des quantificateurs : exemples

- langage logique : $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f\}$, $\mathcal{P} = \mathcal{F}_2 = \{p, q\}$
- structure **M** de domaine $|\mathbf{M}| = \{-2, -1, 1, 2\}$

$$\begin{array}{lll} f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}| \to |\mathbf{M}| & p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 & q^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 \\ f^{\mathbf{M}}(x) = |x| & p^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 \leq m_2\} & q^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 < m_2\} \end{array}$$

- formule $\exists x\, p(f(x), x)$
  - $\exists x\, p(f(x), x)$ est « vraie » ssi la formule $p(f(x), x)$ est vraie pour au moins une valeur possible de x

Interprétation des quantificateurs : exemples

- langage logique : $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f\}$, $\mathcal{P} = \mathcal{F}_2 = \{p, q\}$
- structure $\mathbf{M}$ de domaine $|\mathbf{M}| = \{-2, -1, 1, 2\}$

$$\begin{array}{lll} f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}| \to |\mathbf{M}| & p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 & q^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 \\ f^{\mathbf{M}}(x) = |x| & p^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 \leq m_2\} & q^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 < m_2\} \end{array}$$

- formule $\exists x\, p(f(x), x)$
  - $\exists x\, p(f(x), x)$ est « vraie » ssi la formule $p(f(x), x)$ est vraie pour au moins une valeur possible de x

$$[\exists x\, p(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_v = \sum_{m \in |\mathbf{M}|} [p(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow m]}$$

Interprétation des quantificateurs : exemples

- langage logique : $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f\}, \mathcal{P} = \mathcal{F}_2 = \{p, q\}$
- structure **M** de domaine $|\mathbf{M}| = \{-2, -1, 1, 2\}$

$$
\begin{array}{lll}
f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}| \to |\mathbf{M}| & p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 & q^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 \\
f^{\mathbf{M}}(x) = |x| & p^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 \leq m_2\} & q^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 < m_2\}
\end{array}
$$

- formule $\exists x\, p(f(x), x)$
  - $\exists x\, p(f(x), x)$ est « vraie » ssi la formule $p(f(x), x)$ est vraie pour au moins une valeur possible de x
  - valeurs possibles pour x avec la structure **M** : $-2, -1, 1, 2$

$$[\exists x\, p(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_v = \sum_{m \in |\mathbf{M}|} [p(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow m]}$$

Interprétation des quantificateurs : exemples

- langage logique : $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f\}$, $\mathcal{P} = \mathcal{F}_2 = \{p, q\}$
- structure **M** de domaine $|\mathbf{M}| = \{-2, -1, 1, 2\}$

$$
\begin{array}{lll}
f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}| \to |\mathbf{M}| & p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 & q^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 \\
f^{\mathbf{M}}(x) = |x| & p^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 \leq m_2\} & q^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 < m_2\}
\end{array}
$$

- formule $\exists x\, p(f(x), x)$
  - $\exists x\, p(f(x), x)$ est « vraie » ssi la formule $p(f(x), x)$ est vraie pour au moins une valeur possible de x
  - valeurs possibles pour x avec la structure **M** : $-2, -1, 1, 2$

$$
\begin{array}{rl}
 & [\exists x\, p(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_v = \sum_{m \in |\mathbf{M}|} [p(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow m]} \\
= & [p(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow -2]} + [p(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow -1]} + [p(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow 1]} + [p(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow 2]} \\
= & 0 + 0 + 1 + 1 = 1
\end{array}
$$

lorsque $m \in |\mathbf{M}|$ est positif, on a $|m| \leq m$

Interprétation des quantificateurs : exemples

- langage logique : $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f\}$, $\mathcal{P} = \mathcal{F}_2 = \{p, q\}$
- structure **M** de domaine $|\mathbf{M}| = \{-2, -1, 1, 2\}$

$$
\begin{array}{lll}
f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}| \to |\mathbf{M}| & p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 & q^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 \\
f^{\mathbf{M}}(x) = |x| & p^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 \leq m_2\} & q^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 < m_2\}
\end{array}
$$

- formule $\exists x\, q(f(x), x)$
  - $\exists x\, q(f(x), x)$ est « vraie » ssi la formule $q(f(x), x)$ est vraie pour au moins une valeur possible de x

Interprétation des quantificateurs : exemples

- langage logique : $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f\}$, $\mathcal{P} = \mathcal{F}_2 = \{p, q\}$
- structure **M** de domaine $|\mathbf{M}| = \{-2, -1, 1, 2\}$

$$\begin{array}{lll} f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}| \to |\mathbf{M}| & p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 & q^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 \\ f^{\mathbf{M}}(x) = |x| & p^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 \leq m_2\} & q^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 < m_2\} \end{array}$$

- formule $\exists x\, q(f(x), x)$
  - $\exists x\, q(f(x), x)$ est « vraie » ssi la formule $q(f(x), x)$ est vraie pour au moins une valeur possible de x

$$[\exists x\, q(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_v = \sum_{m \in |\mathbf{M}|} [q(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow m]}$$

Interprétation des quantificateurs : exemples

- langage logique : $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f\}$, $\mathcal{P} = \mathcal{F}_2 = \{p, q\}$
- structure **M** de domaine $|\mathbf{M}| = \{-2, -1, 1, 2\}$

$$\begin{array}{lll} f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}| \to |\mathbf{M}| & p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 & q^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 \\ f^{\mathbf{M}}(x) = |x| & p^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 \leq m_2\} & q^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 < m_2\} \end{array}$$

- formule $\exists x\, q(f(x), x)$
  - $\exists x\, q(f(x), x)$ est « vraie » ssi la formule $q(f(x), x)$ est vraie pour au moins une valeur possible de x
  - valeurs possibles pour x avec la structure **M** : $-2, -1, 1, 2$

$$[\exists x\, q(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_v = \sum_{m \in |\mathbf{M}|} [q(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow m]}$$

Interprétation des quantificateurs : exemples

- langage logique : $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f\}$, $\mathcal{P} = \mathcal{F}_2 = \{p, q\}$
- structure $\mathbf{M}$ de domaine $|\mathbf{M}| = \{-2, -1, 1, 2\}$

$$\begin{array}{lll} f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}| \to |\mathbf{M}| & p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 & q^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^2 \\ f^{\mathbf{M}}(x) = |x| & p^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 \leq m_2\} & q^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) | m_1 < m_2\} \end{array}$$

- formule $\exists x\, q(f(x), x)$
  - $\exists x\, q(f(x), x)$ est « vraie » ssi la formule $q(f(x), x)$ est vraie pour au moins une valeur possible de x
  - valeurs possibles pour x avec la structure $\mathbf{M}$: $-2, -1, 1, 2$

$$\begin{array}{rl} & [\exists x\, q(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_v = \sum_{m \in |\mathbf{M}|} [q(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow m]} \\ = & [q(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow -2]} + [q(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow -1]} + [q(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow 1]} + [q(f(x), x)]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow 2]} \\ = & 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \end{array}$$

pour chaque $m \in |\mathbf{M}|$, on a $|m| \not< m$

Interprétation des formules : exemple

$\forall x \; \exists y \; r(x, f(y))$

Interprétation des formules : exemple

$\forall x \; \exists y \; r(x, f(y))$

structure $\mathbf{M}_1$			
domaine $\mathbb{N}$			
interprétation des fonctions $f^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $n \mapsto n+1$			
interprétation des prédicats $r^{\mathbf{M}_1} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\{(n_1, n_2) \mid n_1 \geq n_2\}$			

Interprétation des formules : exemple

$\forall x \; \exists y \; r(x, f(y))$

structure $\mathbf{M}_1$			
domaine $\mathbb{N}$			
interprétation des fonctions $f^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $n \mapsto n+1$			
interprétation des prédicats $r^{\mathbf{M}_1} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\{(n_1, n_2) \mid n_1 \geq n_2\}$			
$\forall x \, \exists y \; x \geq y + 1$ « faux » $(x = 0)$			

Interprétation des formules : exemple

$\forall x \; \exists y \; r(x, f(y))$

structure $\mathbf{M}_1$	$\mathbf{M}_2$		
domaine $\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$		
interprétation des fonctions $f^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $n \mapsto n+1$	$f^{\mathbf{M}_2} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $n \mapsto n+1$		
interprétation des prédicats $r^{\mathbf{M}_1} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\{(n_1, n_2) \mid n_1 \geq n_2\}$	$r^{\mathbf{M}_2} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $\{(n_1, n_2) \mid n_1 \geq n_2\}$		
$\forall x \, \exists y \; x \geq y+1$ « faux » $(x = 0)$			

Interprétation des formules : exemple

$\forall x\ \exists y\ r(x, f(y))$

structure $\mathbf{M}_1$	$\mathbf{M}_2$		
domaine $\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$		
interprétation des fonctions $f^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $n \mapsto n+1$	$f^{\mathbf{M}_2} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $n \mapsto n+1$		
interprétation des prédicats $r^{\mathbf{M}_1} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\{(n_1, n_2) \mid n_1 \geq n_2\}$	$r^{\mathbf{M}_2} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $\{(n_1, n_2) \mid n_1 \geq n_2\}$		
$\forall x\, \exists y\ x \geq y+1$ « faux » $(x = 0)$	$\forall x\, \exists y\ x \geq y+1$ « vrai » $(y = x-2)$		

Interprétation des formules : exemple

$\forall x \; \exists y \; r(x, f(y))$

structure $\mathbf{M}_1$	$\mathbf{M}_2$	$\mathbf{M}_3$	
domaine $\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}$	
interprétation des fonctions $f^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $n \mapsto n+1$	$f^{\mathbf{M}_2} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $n \mapsto n+1$	$f^{\mathbf{M}_3} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $n \mapsto n$	
interprétation des prédicats $r^{\mathbf{M}_1} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\{(n_1, n_2) \mid n_1 \geq n_2\}$	$r^{\mathbf{M}_2} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $\{(n_1, n_2) \mid n_1 \geq n_2\}$	$r^{\mathbf{M}_3} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\{(n_1, n_2) \mid n_1 \geq n_2\}$	
$\forall x \, \exists y \; x \geq y+1$ « faux » $(x = 0)$	$\forall x \, \exists y \; x \geq y+1$ « vrai » $(y = x - 2)$		

Interprétation des formules : exemple

$\forall x \; \exists y \; r(x, f(y))$

structure $\mathbf{M}_1$	$\mathbf{M}_2$	$\mathbf{M}_3$	
domaine $\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}$	
interprétation des fonctions $f^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $n \mapsto n+1$	$f^{\mathbf{M}_2} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $n \mapsto n+1$	$f^{\mathbf{M}_3} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $n \mapsto n$	
interprétation des prédicats $r^{\mathbf{M}_1} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\{(n_1, n_2) \mid n_1 \geq n_2\}$	$r^{\mathbf{M}_2} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $\{(n_1, n_2) \mid n_1 \geq n_2\}$	$r^{\mathbf{M}_3} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\{(n_1, n_2) \mid n_1 \geq n_2\}$	
$\forall x \, \exists y \; x \geq y+1$ « faux » $(x = 0)$	$\forall x \, \exists y \; x \geq y+1$ « vrai » $(y = x - 2)$	$\forall x \, \exists y \; x \geq y$ « vrai » $(y = x)$	

Interprétation des formules : exemple

$\forall x \; \exists y \; r(x, f(y))$

structure $\mathbf{M}_1$	$\mathbf{M}_2$	$\mathbf{M}_3$	$\mathbf{M}_4$
domaine $\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$
interprétation des fonctions $f^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $n \mapsto n+1$	$f^{\mathbf{M}_2} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $n \mapsto n+1$	$f^{\mathbf{M}_3} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $n \mapsto n$	$f^{\mathbf{M}_4} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $n \mapsto n+1$
interprétation des prédicats $r^{\mathbf{M}_1} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\{(n_1, n_2) \mid n_1 \geq n_2\}$	$r^{\mathbf{M}_2} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $\{(n_1, n_2) \mid n_1 \geq n_2\}$	$r^{\mathbf{M}_3} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\{(n_1, n_2) \mid n_1 \geq n_2\}$	$r^{\mathbf{M}_4} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\{(n_1, n_2) \mid n_1 \leq n_2\}$
$\forall x \, \exists y \; x \geq y+1$ « faux » $(x = 0)$	$\forall x \, \exists y \; x \geq y+1$ « vrai » $(y = x-2)$	$\forall x \, \exists y \; x \geq y$ « vrai » $(y = x)$	

Interprétation des formules : exemple

$\forall x \; \exists y \; r(x, f(y))$

structure $\mathbf{M}_1$	$\mathbf{M}_2$	$\mathbf{M}_3$	$\mathbf{M}_4$
domaine $\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$
interprétation des fonctions $f^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $n \mapsto n+1$	$f^{\mathbf{M}_2} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $n \mapsto n+1$	$f^{\mathbf{M}_3} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $n \mapsto n$	$f^{\mathbf{M}_4} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $n \mapsto n+1$
interprétation des prédicats $r^{\mathbf{M}_1} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\{(n_1, n_2) \mid n_1 \geq n_2\}$	$r^{\mathbf{M}_2} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $\{(n_1, n_2) \mid n_1 \geq n_2\}$	$r^{\mathbf{M}_3} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\{(n_1, n_2) \mid n_1 \geq n_2\}$	$r^{\mathbf{M}_4} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\{(n_1, n_2) \mid n_1 \leq n_2\}$
$\forall x \, \exists y \; x \geq y+1$ « faux » $(x = 0)$	$\forall x \, \exists y \; x \geq y+1$ « vrai » $(y = x-2)$	$\forall x \, \exists y \; x \geq y$ « vrai » $(y = x)$	$\forall x \, \exists y \; x \leq y+1$ « vrai » $(y = x)$

Interprétation des formules de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$

- interprétation $[\forall x\ F]_v^{\mathbf{M}}$ de $\forall x\ F$

Interprétation des formules de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$

- interprétation $[\forall x \ F]_v^{\mathbf{M}}$ de $\forall x \ F$
  - expression booléenne : $\prod_{m \in |\mathbf{M}|} [F]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}}$

Interprétation des formules de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$

- interprétation $[\forall x \; F]_v^{\mathbf{M}}$ de $\forall x \; F$
  - expression booléenne : $\prod_{m \in |\mathbf{M}|} [F]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}}$
  - s'évalue à 1 si et seulement si pour chaque valeur $m \in |\mathbf{M}|$ l'expression $[F]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}}$ s'évalue à 1

Interprétation des formules de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$

- interprétation $[\forall x\ F]_v^{\mathbf{M}}$ de $\forall x\ F$
  - expression booléenne : $\prod_{m \in |\mathbf{M}|} [F]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}}$
  - s'évalue à 1 si et seulement si pour chaque valeur $m \in |\mathbf{M}|$ l'expression $[F]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}}$ s'évalue à 1
  - s'évalue à 0 si et seulement si pour au moins une valeur $m \in |\mathbf{M}|$ l'expression $[F]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}}$ s'évalue à 0

Interprétation des formules de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$

- interprétation $[\forall x\ F]_v^{\mathbf{M}}$ de $\forall x\ F$
  - expression booléenne : $\prod_{m \in |\mathbf{M}|} [F]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow m]}$
  - s'évalue à 1 si et seulement si pour chaque valeur $m \in |\mathbf{M}|$ l'expression $[F]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow m]}$ s'évalue à 1
  - s'évalue à 0 si et seulement si pour au moins une valeur $m \in |\mathbf{M}|$ l'expression $[F]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow m]}$ s'évalue à 0
- interprétation $[\exists x\ F]_v^{\mathbf{M}}$ de $\exists x\ F$

Interprétation des formules de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$

- interprétation $[\forall x\ F]_v^{\mathbf{M}}$ de $\forall x\ F$
  - expression booléenne : $\prod_{m \in |\mathbf{M}|} [F]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow m]}$
  - s'évalue à 1 si et seulement si pour chaque valeur $m \in |\mathbf{M}|$ l'expression $[F]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow m]}$ s'évalue à 1
  - s'évalue à 0 si et seulement si pour au moins une valeur $m \in |\mathbf{M}|$ l'expression $[F]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow m]}$ s'évalue à 0
- interprétation $[\exists x\ F]_v^{\mathbf{M}}$ de $\exists x\ F$
  - expression booléenne : $\sum_{m \in |\mathbf{M}|} [F]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow m]}$

Interprétation des formules de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$

- interprétation $[\forall x\ F]^{\mathbf{M}}_{v}$ de $\forall x\ F$
  - expression booléenne : $\prod_{m \in |\mathbf{M}|} [F]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow m]}$
  - s'évalue à 1 si et seulement si pour chaque valeur $m \in |\mathbf{M}|$ l'expression $[F]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow m]}$ s'évalue à 1
  - s'évalue à 0 si et seulement si pour au moins une valeur $m \in |\mathbf{M}|$ l'expression $[F]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow m]}$ s'évalue à 0
- interprétation $[\exists x\ F]^{\mathbf{M}}_{v}$ de $\exists x\ F$
  - expression booléenne : $\sum_{m \in |\mathbf{M}|} [F]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow m]}$
  - s'évalue à 1 si et seulement si pour au moins une valeur $m \in |\mathbf{M}|$ l'expression $[F]^{\mathbf{M}}_{v[x \leftarrow m]}$ s'évalue à 1

Interprétation des formules de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$

- interprétation $[\forall x \; F]_v^{\mathbf{M}}$ de $\forall x \; F$
  - expression booléenne : $\prod_{m \in |\mathbf{M}|} [F]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}}$
  - s'évalue à 1 si et seulement si pour chaque valeur $m \in |\mathbf{M}|$ l'expression $[F]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}}$ s'évalue à 1
  - s'évalue à 0 si et seulement si pour au moins une valeur $m \in |\mathbf{M}|$ l'expression $[F]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}}$ s'évalue à 0
- interprétation $[\exists x \; F]_v^{\mathbf{M}}$ de $\exists x \; F$
  - expression booléenne : $\sum_{m \in |\mathbf{M}|} [F]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}}$
  - s'évalue à 1 si et seulement si pour au moins une valeur $m \in |\mathbf{M}|$ l'expression $[F]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}}$ s'évalue à 1
  - s'évalue à 0 si et seulement si pour chaque valeur $m \in |\mathbf{M}|$ l'expression $[F]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}}$ s'évalue à 0

Interprétation des formules : $[\ ]_v^{\mathbf{M}} : \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{B}$

$[\text{true}]_v^{\mathbf{M}} = 1 \qquad [\text{false}]_v^{\mathbf{M}} = 0$

$$[p(t_1, \cdots, t_n)]_v^{\mathbf{M}} = \mathbf{I}_{\mathbf{M},v}(p(t_1, \cdots, t_n)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \left([t_1]_v^{\mathbf{M}}, \cdots, [t_n]_v^{\mathbf{M}}\right) \in p^{\mathbf{M}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$[\neg F]_v^{\mathbf{M}} = \overline{[F]_v^{\mathbf{M}}} \qquad [F_1 \wedge F_2]_v^{\mathbf{M}} = [F_1]_v^{\mathbf{M}} \cdot [F_2]_v^{\mathbf{M}}$

$[F_1 \vee F_2]_v^{\mathbf{M}} = [F_1]_v^{\mathbf{M}} + [F_2]_v^{\mathbf{M}} \qquad [F_1 \Rightarrow F_2]_v^{\mathbf{M}} = \overline{[F_1]_v^{\mathbf{M}}} + [F_2]_v^{\mathbf{M}}$

$$\begin{aligned} [\forall x\, F]_v^{\mathbf{M}} &= \prod_{m \in |\mathbf{M}|} [F]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{ssi } [F]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}} = 1 \text{ pour chaque élément } m \in |\mathbf{M}| \\ 0 & \text{ssi } [F]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}} = 0 \text{ pour au moins un élément } m \in |\mathbf{M}| \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\exists x\, F]_v^{\mathbf{M}} &= \sum_{m \in |\mathbf{M}|} [F]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{ssi } [F]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}} = 1 \text{ pour au moins un élément } m \in |\mathbf{M}| \\ 0 & \text{ssi } [F]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}} = 0 \text{ pour chaque élément } m \in |\mathbf{M}| \end{cases} \end{aligned}$$

Interprétation des formules

- la valuation v sert uniquement à déterminer la valeur des variables libres de F lors du calcul de $[F]_v^{\mathbf{M}}$

Interprétation des formules

- la valuation v sert uniquement à déterminer la valeur des variables libres de F lors du calcul de $[F]_v^{\mathbf{M}}$
  - *exemple :* $\forall x\, p(x, y)$ $(\mathrm{Free}(\forall x\, p(x, y)) = \{y\})$

structure $\mathbf{M}$ de domaine $\lvert\mathbf{M}\rvert = \{-2, -1, 1, 2\}$ $p^{\mathbf{M}} \subseteq \lvert\mathbf{M}\rvert^2 \qquad p^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) \mid m_1 \leq m_2\}$
valuation v telle que $v(x) = -1$ et $v(y) = 2$

Interprétation des formules

- la valuation v sert uniquement à déterminer la valeur des variables libres de F lors du calcul de $[F]_v^{\mathbf{M}}$
  - *exemple :* $\forall x\, p(x,y)$ $\qquad (\mathrm{Free}(\forall x\, p(x,y)) = \{y\})$

structure $\mathbf{M}$ de domaine $\lvert\mathbf{M}\rvert = \{-2,-1,1,2\}$ $p^{\mathbf{M}} \subseteq \lvert\mathbf{M}\rvert^2 \qquad p^{\mathbf{M}} = \{(m_1,m_2) \mid m_1 \leq m_2\}$
valuation v telle que $v(x) = -1$ et $v(y) = 2$

$$\begin{array}{rl} & [\forall x\, p(x,y)]_v^{\mathbf{M}} = \prod_{m\in\lvert\mathbf{M}\rvert} [p(x,y)]_{v[x\leftarrow m]}^{\mathbf{M}} \\ = & [p(x,y)]_{v[x\leftarrow -2]}^{\mathbf{M}} \cdot [p(x,y)]_{v[x\leftarrow -1]}^{\mathbf{M}} \cdot [p(x,y)]_{v[x\leftarrow 1]}^{\mathbf{M}} \cdot [p(x,y)]_{v[x\leftarrow 2]}^{\mathbf{M}} \\ = & 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1 \end{array}$$

Interprétation des formules

- la valuation v sert uniquement à déterminer la valeur des variables libres de F lors du calcul de $[F]_v^{\mathbf{M}}$
  - *exemple :* $\forall x\, p(x, y)$ $\qquad\qquad$ $(\mathrm{Free}(\forall x\, p(x, y)) = \{y\})$

structure $\mathbf{M}$ de domaine $\lvert\mathbf{M}\rvert = \{-2, -1, 1, 2\}$
$p^{\mathbf{M}} \subseteq \lvert\mathbf{M}\rvert^2 \qquad p^{\mathbf{M}} = \{(m_1, m_2) \mid m_1 \leq m_2\}$
valuation v telle que $v(x) = -1$ et $v(y) = 2$

$$\begin{array}{rl} & [\forall x\, p(x, y)]_v^{\mathbf{M}} = \prod_{m \in \lvert\mathbf{M}\rvert} [p(x, y)]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}} \\ = & [p(x, y)]_{v[x \leftarrow -2]}^{\mathbf{M}} \cdot [p(x, y)]_{v[x \leftarrow -1]}^{\mathbf{M}} \cdot [p(x, y)]_{v[x \leftarrow 1]}^{\mathbf{M}} \cdot [p(x, y)]_{v[x \leftarrow 2]}^{\mathbf{M}} \\ = & 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & [p(x, y)]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}} = 1 \\ \text{ssi} & \left([x]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}}, [y]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}}\right) = (v[x \leftarrow m](x), v[x \leftarrow m](y)) = (m, v(y)) \in p^{\mathbf{M}} \\ \text{ssi} & m \leq v(y) \end{array}$$

Interprétation des formules

- la valuation v sert uniquement à déterminer la valeur des variables libres de F lors du calcul de $[F]_v^{\mathbf{M}}$
- $[F]_v^{\mathbf{M}}$ ne dépend pas des valeurs associées par v aux variables n'appartenant pas à $\mathrm{Free}(F)$

Interprétation des formules

- la valuation v sert uniquement à déterminer la valeur des variables libres de F lors du calcul de $[F]_v^{\mathbf{M}}$
- $[F]_v^{\mathbf{M}}$ ne dépend pas des valeurs associées par v aux variables n'appartenant pas à $\mathrm{Free}(F)$
  - si $x \notin \mathrm{Free}(F)$, alors $[F]_v^{\mathbf{M}} = [F]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}}$ (pour tout $m \in |\mathbf{M}|$)

Interprétation des formules

- la valuation v sert uniquement à déterminer la valeur des variables libres de F lors du calcul de $[F]_v^{\mathbf{M}}$
- $[F]_v^{\mathbf{M}}$ ne dépend pas des valeurs associées par v aux variables n'appartenant pas à $\mathrm{Free}(F)$
  - si $x \notin \mathrm{Free}(F)$, alors $[F]_v^{\mathbf{M}} = [F]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}}$ (pour tout $m \in |\mathbf{M}|$)
- si F est une formule close, $[F]_v^{\mathbf{M}}$ ne dépend pas de v

Modèles – Formules valides

- une structure **M** **satisfait** une formule F ssi $[F']_v^{\mathbf{M}} = 1$ où F' est la clôture universelle de F (et v est une valuation quelconque).
  - **M** est un **modèle** de F

Modèles – Formules valides

- une structure **M** **satisfait** une formule F ssi $[F']_v^{\mathbf{M}} = 1$ où F' est la clôture universelle de F (et v est une valuation quelconque).
  - **M** est un **modèle** de F
- une formule **insatisfiable** est une formule qui n'admet pas de modèle.

Modèles – Formules valides

- une structure $\mathbf{M}$ **satisfait** une formule F ssi $[F']_v^{\mathbf{M}} = 1$ où F' est la clôture universelle de F (et v est une valuation quelconque).
  - $\mathbf{M}$ est un **modèle** de F
- une formule **insatisfiable** est une formule qui n'admet pas de modèle.
- une formule F est **valide** ssi elle est satisfaite par toutes les structures du langage défini par $\mathcal{F} \cup \mathcal{P}$.

Modèles – Formules valides

- une structure **M satisfait** une formule F ssi $[F']_v^{\mathbf{M}} = 1$ où F' est la clôture universelle de F (et v est une valuation quelconque).
  - **M** est un **modèle** de F
- une formule **insatisfiable** est une formule qui n'admet pas de modèle.
- une formule F est **valide** ssi elle est satisfaite par toutes les structures du langage défini par $\mathcal{F} \cup \mathcal{P}$.
  - F est valide ssi $\neg F$ est insatisfiable.

Modèles – Formules valides

- une structure **M** **satisfait** une formule F ssi $[F']_v^{\mathbf{M}} = 1$ où F' est la clôture universelle de F (et v est une valuation quelconque).
  - **M** est un **modèle** de F
- une formule **insatisfiable** est une formule qui n'admet pas de modèle.
- une formule F est **valide** ssi elle est satisfaite par toutes les structures du langage défini par $\mathcal{F} \cup \mathcal{P}$.
  - impossible d'énumérer toutes les structures **M** : déterminer si F est valide est un **problème indécidable**
    - ★ il n'existe pas d'algorithme qui détermine si F est valide

Conséquences – Formules équivalentes

- $F_2 \models F_1$: la formule F_1 est une conséquence de la formule F_2 ssi pour toute structure $\mathbf{M}$ et toute valuation v, si $[F_2]_v^{\mathbf{M}} = 1$, alors $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 1$

Conséquences – Formules équivalentes

- $F_2 \models F_1$: la formule F_1 est une conséquence de la formule F_2 ssi pour toute structure **M** et toute valuation v, si $[F_2]_v^{\mathbf{M}} = 1$, alors $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 1$
  - $\{F_1, \cdots, F_n\} \models F$: la formule F est une conséquence de l'ensemble de formules $\{F_1, \cdots, F_n\}$ ssi pour toute structure **M** et toute valuation v, si $[F_1 \wedge \cdots \wedge F_n]_v^{\mathbf{M}} = 1$, alors $[F]_v^{\mathbf{M}} = 1$.

Conséquences – Formules équivalentes

- $F_2 \models F_1$: la formule F_1 est une conséquence de la formule F_2 ssi pour toute structure $\mathbf{M}$ et toute valuation v, si $[F_2]_v^{\mathbf{M}} = 1$, alors $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 1$
  - $\{F_1, \cdots, F_n\} \models F$: la formule F est une conséquence de l'ensemble de formules $\{F_1, \cdots, F_n\}$ ssi pour toute structure $\mathbf{M}$ et toute valuation v, si $[F_1 \wedge \cdots \wedge F_n]_v^{\mathbf{M}} = 1$, alors $[F]_v^{\mathbf{M}} = 1$.
  - $F_2 \models F_1$ ssi $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide

Conséquences – Formules équivalentes

- $F_2 \models F_1$: la formule F_1 est une conséquence de la formule F_2 ssi pour toute structure **M** et toute valuation v, si $[F_2]_v^{\mathbf{M}} = 1$, alors $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 1$
  - $\{F_1, \cdots, F_n\} \models F$: la formule F est une conséquence de l'ensemble de formules $\{F_1, \cdots, F_n\}$ ssi pour toute structure **M** et toute valuation v, si $[F_1 \wedge \cdots \wedge F_n]_v^{\mathbf{M}} = 1$, alors $[F]_v^{\mathbf{M}} = 1$.
  - $F_2 \models F_1$ ssi $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide
  - $\{F_1, F_2, \cdots, F_n\} \models F$ ssi $(F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n) \Rightarrow F$ est valide

Conséquences – Formules équivalentes

- $F_2 \models F_1$: la formule F_1 est une conséquence de la formule F_2 ssi pour toute structure **M** et toute valuation v, si $[F_2]_v^{\mathbf{M}} = 1$, alors $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 1$
  - $\{F_1, \cdots, F_n\} \models F$: la formule F est une conséquence de l'ensemble de formules $\{F_1, \cdots, F_n\}$ ssi pour toute structure **M** et toute valuation v, si $[F_1 \wedge \cdots \wedge F_n]_v^{\mathbf{M}} = 1$, alors $[F]_v^{\mathbf{M}} = 1$.
  - $F_2 \models F_1$ ssi $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide
  - $\{F_1, F_2, \cdots, F_n\} \models F$ ssi $(F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n) \Rightarrow F$ est valide
- $F_1 \models\!\mid F_2$: les formules F_1 et F_2 sont équivalentes ssi pour toute structure **M** et toute valuation v, $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = [F_2]_v^{\mathbf{M}}$

Conséquences – Formules équivalentes

- $F_2 \models F_1$: la formule F_1 est une conséquence de la formule F_2 ssi pour toute structure $\mathbf{M}$ et toute valuation v, si $[F_2]_v^{\mathbf{M}} = 1$, alors $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 1$
  - $\{F_1, \cdots, F_n\} \models F$: la formule F est une conséquence de l'ensemble de formules $\{F_1, \cdots, F_n\}$ ssi pour toute structure $\mathbf{M}$ et toute valuation v, si $[F_1 \wedge \cdots \wedge F_n]_v^{\mathbf{M}} = 1$, alors $[F]_v^{\mathbf{M}} = 1$.
  - $F_2 \models F_1$ ssi $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide
  - $\{F_1, F_2, \cdots, F_n\} \models F$ ssi $(F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n) \Rightarrow F$ est valide
- $F_1 \models\!\!\!\!\!=\!\!| F_2$: les formules F_1 et F_2 sont équivalentes ssi pour toute structure $\mathbf{M}$ et toute valuation v, $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = [F_2]_v^{\mathbf{M}}$
  - $\models\!\!\!\!\!=\!\!|$ est une relation d'équivalence (relation réflexive, symétrique et transitive)

Conséquences – Formules équivalentes

- $F_2 \models F_1$: la formule F_1 est une conséquence de la formule F_2 ssi pour toute structure **M** et toute valuation v, si $[F_2]_v^{\mathbf{M}} = 1$, alors $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = 1$
  - $\{F_1, \cdots, F_n\} \models F$: la formule F est une conséquence de l'ensemble de formules $\{F_1, \cdots, F_n\}$ ssi pour toute structure **M** et toute valuation v, si $[F_1 \wedge \cdots \wedge F_n]_v^{\mathbf{M}} = 1$, alors $[F]_v^{\mathbf{M}} = 1$.
  - $F_2 \models F_1$ ssi $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide
  - $\{F_1, F_2, \cdots, F_n\} \models F$ ssi $(F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n) \Rightarrow F$ est valide
- $F_1 \models\!\mid F_2$: les formules F_1 et F_2 sont équivalentes ssi pour toute structure **M** et toute valuation v, $[F_1]_v^{\mathbf{M}} = [F_2]_v^{\mathbf{M}}$
  - $\models\!\mid$ est une relation d'équivalence (relation réflexive, symétrique et transitive)
  - $F_1 \models\!\mid F_2$ ssi $F_2 \models F_1$ et $F_1 \models F_2$.

Validité/Complétude de la Déduction Naturelle

$F, F_1, \cdots, F_n \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$

- **Validité** : si F est prouvable à partir des hypothèses $F_1, \cdots, F_n$, alors $\{F_1, \cdots, F_n\} \models F$
- **Complétude** : si $\{F_1, \cdots, F_n\} \models F$ alors F est prouvable à partir des hypothèses $F_1, \cdots, F_n$