Cours 4
Règles de déduction : quantificateurs

Logique – Licence Informatique

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Système de la déduction naturelle

- règles : axiome, affaiblissement, introduction et élimination des formules true et false et des connecteurs logiques, raisonnement par l'absurde

Système de la déduction naturelle

- règles : axiome, affaiblissement, introduction et élimination des formules true et false et des connecteurs logiques, raisonnement par l'absurde
- règles d'introduction et d'élimination des quantificateurs ($\forall$ et $\exists$)

Système de la déduction naturelle

- règles : axiome, affaiblissement, introduction et élimination des formules true et false et des connecteurs logiques, raisonnement par l'absurde
- règles d'introduction et d'élimination des quantificateurs ($\forall$ et $\exists$)
  - règles d'introduction $(I_\forall)$, $(I_\exists)$
    - permettent de prouver une formule représentée par un arbre de syntaxe dont la racine est le quantificateur

Système de la déduction naturelle

- règles : axiome, affaiblissement, introduction et élimination des formules true et false et des connecteurs logiques, raisonnement par l'absurde
- règles d'introduction et d'élimination des quantificateurs ($\forall$ et $\exists$)
  - règles d'introduction $(I_\forall)$, $(I_\exists)$
    - permettent de prouver une formule représentée par un arbre de syntaxe dont la racine est le quantificateur
  - règles d'élimination $(E_\forall)$, $(E_\exists)$
    - permettent de prouver une formule en utilisant la preuve d'une formule représentée par un arbre de syntaxe dont la racine est le quantificateur

Quantification universelle : introduction ($I_\forall$)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : \mathrm{inf}(k, x), h_2 : \mathrm{inf}(k, z)$, montrons $\forall x\, \mathrm{inf}(w, x)$

$\langle i \rangle$ CQFD ($I_\forall$)

Quantification universelle : introduction ($I_\forall$)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : \inf(k, x), h_2 : \inf(k, z)$, montrons $\forall x \inf(w, x)$

$\langle i+1 \rangle$ soit x, montrons $\inf(w, x)$

$\langle i+1 \rangle$ CQFD $(\cdots)$

$\langle i \rangle$ CQFD ($I_\forall$)

Quantification universelle : introduction ($I_\forall$)

$\langle i \rangle$ supposons h_1 : $\mathrm{inf}(k, x), h_2$: $\mathrm{inf}(k, z)$, montrons $\forall x \, \mathrm{inf}(w, x)$

$\langle i+1 \rangle$ soit x, montrons $\mathrm{inf}(w, x)$

Erreur : x désigne un terme sur lequel porte une hypothèse (h_1)

$\langle i+1 \rangle$ CQFD $(\cdots)$

$\langle i \rangle$ CQFD ($I_\forall$)

Quantification universelle : introduction ($I_\forall$)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : \inf(k, x), h_2 : \inf(k, z)$, montrons $\forall x \inf(w, x)$

$\langle i \rangle$ CQFD ($I_\forall$)

Quantification universelle : introduction ($I_\forall$)

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : \mathrm{inf}(k, x), h_2 : \mathrm{inf}(k, z)$, montrons $\forall x\, \mathrm{inf}(w, x)$
	$\langle i+1 \rangle$ soit z, montrons $\mathrm{inf}(w, z)$
	$\langle i+1 \rangle$ CQFD $(\cdots)$
$\langle i \rangle$	CQFD ($I_\forall$)

Quantification universelle : introduction ($I_\forall$)

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : \mathrm{inf}(k, x), h_2 : \mathrm{inf}(k, z)$, montrons $\forall x\, \mathrm{inf}(w, x)$
	$\langle i+1 \rangle$ soit z, montrons $\mathrm{inf}(w, z)$
	Erreur : z désigne un terme sur lequel porte une hypothèse (h_2)
	$\langle i+1 \rangle$ CQFD $(\cdots)$
$\langle i \rangle$	CQFD ($I_\forall$)

Quantification universelle : introduction ($I_\forall$)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : \mathrm{inf}(k, x), h_2 : \mathrm{inf}(k, z)$, montrons $\forall x\, \mathrm{inf}(w, x)$

$\langle i \rangle$ CQFD ($I_\forall$)

Quantification universelle : introduction ($I_\forall$)

$\langle i \rangle$	supposons h_1 : $\inf(k, x), h_2$: $\inf(k, z)$, montrons $\forall x \inf(w, x)$
	$\langle i+1 \rangle$ soit w, montrons $\inf(w, w)$
	$\langle i+1 \rangle$ CQFD $(\cdots)$
$\langle i \rangle$	CQFD ($I_\forall$)

Quantification universelle : introduction ($I_\forall$)

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : \inf(k, x), h_2 : \inf(k, z)$, montrons $\forall x \inf(w, x)$
	$\langle i+1 \rangle$ soit w, montrons $\inf(w, w)$
	Erreur : w désigne déjà un terme dans la formule à prouver
	$\langle i+1 \rangle$ CQFD $(\cdots)$
$\langle i \rangle$	CQFD ($I_\forall$)

Quantification universelle : introduction ($I_\forall$)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : \mathrm{inf}(k, x), h_2 : \mathrm{inf}(k, z)$, montrons $\forall x \, \mathrm{inf}(w, x)$

$\langle i \rangle$ CQFD ($I_\forall$)

Quantification universelle : introduction ($I_\forall$)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : \mathrm{inf}(k, x), h_2 : \mathrm{inf}(k, z)$, montrons $\forall x\, \mathrm{inf}(w, x)$

$\langle i+1 \rangle$ soit une nouvelle variable y, montrons $\mathrm{inf}(w, y)$

$\cdots$ y n'est libre ni dans les hypothèses ni dans la formule à prouver

$\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($I_\forall$)

Quantification universelle : introduction ($I_\forall$)

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : \mathrm{inf}(k, x), h_2 : \mathrm{inf}(k, z)$, montrons $\forall x\, \mathrm{inf}(w, x)$	
	$\langle i+1 \rangle$ soit une nouvelle variable y, montrons $\mathrm{inf}(w, y)$	
	$\cdots$	y n'est libre ni dans les hypothèses ni dans la formule à prouver
	$\langle i+1 \rangle$ CQFD	
$\langle i \rangle$	CQFD ($I_\forall$)	

pour prouver une propriété A pour tout x, c-à-d pour prouver $\forall x \; A$

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$, montrons $\forall x\, A$
$\langle i \rangle$	CQFD ($I_\forall$)

Quantification universelle : introduction ($I_\forall$)

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : \mathrm{inf}(k,x), h_2 : \mathrm{inf}(k,z)$, montrons $\forall x\, \mathrm{inf}(w,x)$
	$\langle i+1 \rangle$ soit une nouvelle variable y, montrons $\mathrm{inf}(w,y)$
	$\cdots$ y n'est libre ni dans les hypothèses ni dans la formule à prouver
	$\langle i+1 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD ($I_\forall$)

pour prouver une propriété A pour tout x, c-à-d pour prouver $\forall x\ A$, il suffit de prouver la propriété A pour un élément y **sans rien supposer sur cet élément**, c-à-d prouver $A[x := y]$ avec $y \notin \mathrm{Free}(A) \cup \cup_{i=1}^{n} \mathrm{Free}(A_i)$

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$, montrons $\forall x\ A$
	$\langle i+1 \rangle$ soit une nouvelle variable $y \notin \mathrm{Free}(A) \cup \cup_{i=1}^{n} \mathrm{Free}(A_i)$ montrons $A[x := y]$
	$\boxed{\cdots}$
	$\langle i+1 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD ($I_\forall$)

Quantification universelle : introduction ($I_\forall$)

- le contenu de la boîte $\langle i+1 \rangle$ est complètement déterminé par le contenu de la boîte $\langle i \rangle$
  - trouver une « nouvelle » variable ne nécessite pas de raisonner

pour prouver une propriété A pour tout x, c-à-d pour prouver $\forall x\ A$, il suffit de prouver la propriété A pour un élément y **sans rien supposer sur cet élément**, c-à-d prouver $A[x := y]$ avec $y \notin \mathrm{Free}(A) \cup \cup_{i=1}^{n} \mathrm{Free}(A_i)$

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$, montrons $\forall x\ A$
$\langle i+1 \rangle$	soit une nouvelle variable $y \notin \mathrm{Free}(A) \cup \cup_{i=1}^{n} \mathrm{Free}(A_i)$
	montrons $A[x := y]$
	$\boxed{\cdots}$
$\langle i+1 \rangle$	CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD ($I_\forall$)

Quantification universelle : élimination ($E_\forall$)

$\langle i \rangle$	montrons $\mathrm{inf}(0, 4)$
$\langle i \rangle$	CQFD ($E_\forall$)

Quantification universelle : élimination ($E_\forall$)

$$
\boxed{
\begin{array}{ll}
\langle i \rangle & \text{montrons } \mathrm{inf}(0,4) \\
 & \boxed{\begin{array}{ll}
 \langle i+1 \rangle & \text{montrons } \forall x\, \mathrm{inf}(0,x) \\
  & \boxed{\cdots} \\
 \langle i+1 \rangle & \text{CQFD}
 \end{array}} \\
\langle i \rangle & \text{CQFD } (E_\forall)
\end{array}
}
$$

Quantification universelle : élimination ($E_\forall$)

$\langle i \rangle$	montrons $\mathrm{inf}(0, 4)$	$\mathrm{inf}(0, x)[x := 4]$
	$\langle i+1 \rangle$ montrons $\forall x\, \mathrm{inf}(0, x)$	
	$\boxed{\cdots}$	
	$\langle i+1 \rangle$ CQFD	
$\langle i \rangle$	CQFD ($E_\forall$)	

Quantification universelle : élimination ($E_\forall$)

$\langle i \rangle$	montrons $\mathrm{inf}(0,4)$ $\mathrm{inf}(0,x)[x := 4]$
$\langle i+1 \rangle$	montrons $\forall x\, \mathrm{inf}(0,x)$
	$\boxed{\cdots}$
$\langle i+1 \rangle$	CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD ($E_\forall$)

pour prouver une propriété A exprimée sur une variable x pour une certaine valeur t de x, c-à-d pour prouver $A[x := t]$

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
	montrons $A[x := t]$
$\langle i \rangle$	CQFD ($E_\forall$)

Quantification universelle : élimination ($E_\forall$)

$\langle i \rangle$	montrons $\mathrm{inf}(0,4)$		$\mathrm{inf}(0,x)[x := 4]$
	$\langle i+1 \rangle$	montrons $\forall x\, \mathrm{inf}(0,x)$	
		$\boxed{\cdots}$	
	$\langle i+1 \rangle$	CQFD	
$\langle i \rangle$	CQFD ($E_\forall$)		

pour prouver une propriété A exprimée sur une variable x pour une certaine valeur t de x, c-à-d pour prouver $A[x := t]$, il suffit de prouver cette propriété pour toutes les valeurs de x, c-à-d prouver $\forall x\ A$

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$	
	montrons $A[x := t]$	
	$\langle i+1 \rangle$	montrons $\forall x\, A$
		$\boxed{\cdots}$
	$\langle i+1 \rangle$	CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD ($E_\forall$)	

Quantification universelle : élimination ($E_\forall$)

- le contenu de la boîte $\langle i+1 \rangle$ est obtenu en déterminant quelle variable de la formule à prouver il faut « généraliser » (i.e. quantifier universellement)

pour prouver une propriété A exprimée sur une variable x pour une certaine valeur t de x, c-à-d pour prouver $A[x := t]$, il suffit de prouver cette propriété pour toutes les valeurs de x, c-à-d prouver $\forall x\ A$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $A[x := t]$

> $\langle i+1 \rangle$ montrons $\forall x\ A$
>
> > $\cdots$
>
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($E_\forall$)

Quantification existentielle : introduction ($I_\exists$)

$\langle i \rangle$	montrons $\exists x \, \mathrm{premier}(x)$
$\langle i \rangle$	CQFD ($I_\exists$)

Quantification existentielle : introduction ($I_\exists$)

$\langle i \rangle$	montrons $\exists x\ \mathrm{premier}(x)$		
	$\langle i+1 \rangle$	montrons $\mathrm{premier}(7)$	$(\mathrm{premier}(x))[x := 7]$
		$\boxed{\cdots}$	
	$\langle i+1 \rangle$	CQFD	
$\langle i \rangle$	CQFD ($I_\exists$)		

Quantification existentielle : introduction ($I_\exists$)

$\langle i \rangle$	montrons $\exists x\ \mathrm{premier}(x)$		
$\langle i+1 \rangle$	montrons $\mathrm{premier}(7)$	$(\mathrm{premier}(x))[x := 7]$	
	$\boxed{\cdots}$		
$\langle i+1 \rangle$	CQFD		
$\langle i \rangle$	CQFD ($I_\exists$)		

pour prouver qu'il existe une valeur pour la variable x pour laquelle une propriété A est « vraie », c-à-d pour prouver $\exists x\ A$

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$ montrons $\exists x\ A$
$\langle i \rangle$	CQFD ($I_\exists$)

Quantification existentielle : introduction ($I_\exists$)

$$
\begin{array}{|ll|}
\hline
\langle i \rangle & \text{montrons } \exists x\, \mathrm{premier}(x) \\
 & \begin{array}{|lll|}
 \hline
 \langle i+1 \rangle & \text{montrons } \mathrm{premier}(7) & \colorbox{yellow}{$(\mathrm{premier}(x))[x := 7]$} \\
 & \boxed{\cdots} & \\
 \langle i+1 \rangle & \text{CQFD} & \\
 \hline
 \end{array} \\
\langle i \rangle & \text{CQFD } (I_\exists) \\
\hline
\end{array}
$$

pour prouver qu'il existe une valeur pour la variable x pour laquelle une propriété A est « vraie », c-à-d pour prouver $\exists x\, A$, il suffit de trouver une valeur t et de prouver $A[x := t]$

$$
\begin{array}{|ll|}
\hline
\langle i \rangle & \text{supposons } h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n \\
 & \text{montrons } \exists x\, A \\
 & \begin{array}{|ll|}
 \hline
 \langle i+1 \rangle & \text{montrons } A[x := t] \\
 & \boxed{\cdots} \\
 \langle i+1 \rangle & \text{CQFD} \\
 \hline
 \end{array} \\
\langle i \rangle & \text{CQFD } (I_\exists) \\
\hline
\end{array}
$$

Quantification existentielle : introduction ($I_\exists$)

- appliquer cette règle nécessite de choisir/trouver un terme t tel que la formule $A[x := t]$ soit prouvable

pour prouver qu'il existe une valeur pour la variable x pour laquelle une propriété A est « vraie », c-à-d pour prouver $\exists x\, A$, il suffit de trouver une valeur t et de prouver $A[x := t]$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \langle i \rangle & \text{supposons } h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n \\ & \text{montrons } \exists x\, A \\ & \boxed{\begin{array}{ll} \langle i+1 \rangle & \text{montrons } A[x := t] \\ & \boxed{\cdots} \\ \langle i+1 \rangle & \text{CQFD} \end{array}} \\ \langle i \rangle & \text{CQFD } (I_\exists) \end{array}}$$

Quantification existentielle : introduction ($I_\exists$)

- appliquer cette règle nécessite de choisir/trouver un terme t tel que la formule $A[x := t]$ soit prouvable
- ce n'est pas la seule manière de prouver $\exists x\, A$ ... en logique classique, on peut par exemple utiliser un raisonnement par l'absurde

pour prouver qu'il existe une valeur pour la variable x pour laquelle une propriété A est « vraie », c-à-d pour prouver $\exists x\, A$, il suffit de trouver une valeur t et de prouver $A[x := t]$

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$		
	montrons $\exists x\, A$		
	$\langle i+1 \rangle$	montrons $A[x := t]$	
		$\boxed{\cdots}$	
	$\langle i+1 \rangle$	CQFD	
$\langle i \rangle$	CQFD ($I_\exists$)		

Quantification existentielle : élimination ($E_\exists$)

$\langle 1 \rangle$ supposons $h_1 : \mathrm{inf}(k, z), h_2 : \exists x\, \mathrm{inf}(v, x)$, montrons $\mathrm{inf}(k, w)$

$\langle 1 \rangle$ CQFD ($I_\forall$)

Quantification existentielle : élimination ($E_\exists$)

$\langle 1 \rangle$ supposons $h_1 : \mathrm{inf}(k, z), h_2 : \exists x\, \mathrm{inf}(v, x)$, montrons $\mathrm{inf}(k, w)$

$\langle 2 \rangle$ montrons $\exists x\, \mathrm{inf}(v, x)$

$\langle 2 \rangle$ CQFD $(\mathrm{Ax}$ avec $h_2)$

$\langle 1 \rangle$ CQFD $(I_\forall)$

Quantification existentielle : élimination ($E_\exists$)

$\langle 1 \rangle$	supposons $h_1 : \mathrm{inf}(k, z), h_2 : \exists x\, \mathrm{inf}(v, x)$, montrons $\mathrm{inf}(k, w)$
$\langle 2 \rangle$	montrons $\exists x\, \mathrm{inf}(v, x)$
$\langle 2 \rangle$	CQFD (Ax avec h_2)
$\langle 3 \rangle$	soit z, supposons $h_3 : \mathrm{inf}(v, z)$, montrons $\mathrm{inf}(k, w)$
$\langle 3 \rangle$	CQFD $(\cdots)$
$\langle 1 \rangle$	CQFD ($I_\forall$)

Quantification existentielle : élimination ($E_\exists$)

$\langle 1 \rangle$ supposons $h_1 : \mathrm{inf}(k, z), h_2 : \exists x\, \mathrm{inf}(v, x)$, montrons $\mathrm{inf}(k, w)$

$\langle 2 \rangle$ montrons $\exists x\, \mathrm{inf}(v, x)$

$\langle 2 \rangle$ CQFD (Ax avec h_2)

$\langle 3 \rangle$ soit z, supposons $h_3 : \mathrm{inf}(v, z)$, montrons $\mathrm{inf}(k, w)$

Erreur : z désigne un terme sur lequel porte une hypothèse (h_1)

$\langle 3 \rangle$ CQFD $(\cdots)$

$\langle 1 \rangle$ CQFD ($I_\forall$)

Quantification existentielle : élimination ($E_\exists$)

$\langle 1 \rangle$ supposons h_1 : $\mathrm{inf}(k, z), h_2 : \exists x\, \mathrm{inf}(v, x)$, montrons $\mathrm{inf}(k, w)$

$\langle 2 \rangle$ montrons $\exists x\, \mathrm{inf}(v, x)$

$\langle 2 \rangle$ CQFD (Ax avec h_2)

$\langle 3 \rangle$ soit v, supposons h_3 : $\mathrm{inf}(v, v)$, montrons $\mathrm{inf}(k, w)$

$\langle 3 \rangle$ CQFD $(\cdots)$

$\langle 1 \rangle$ CQFD ($I_\forall$)

Quantification existentielle : élimination ($E_\exists$)

⟨1⟩ supposons $h_1 : \mathrm{inf}(k, z), h_2 : \exists x\, \mathrm{inf}(v, x)$, montrons $\mathrm{inf}(k, w)$

⟨2⟩ montrons $\exists x\, \mathrm{inf}(v, x)$

⟨2⟩ CQFD (Ax avec h_2)

⟨3⟩ soit v, supposons $h_3 : \mathrm{inf}(v, v)$, montrons $\mathrm{inf}(k, w)$

Erreur : v désigne un terme sur lequel porte une hypothèse (h_2)

⟨3⟩ CQFD $(\cdots)$

⟨1⟩ CQFD ($I_\forall$)

Quantification existentielle : élimination ($E_\exists$)

⟨1⟩ supposons $h_1 : \mathrm{inf}(k, z), h_2 : \exists x\, \mathrm{inf}(v, x)$, montrons $\mathrm{inf}(k, w)$

⟨2⟩ montrons $\exists x\, \mathrm{inf}(v, x)$

⟨2⟩ CQFD (Ax avec h_2)

⟨3⟩ soit w, supposons $h_3 : \mathrm{inf}(v, w)$, montrons $\mathrm{inf}(k, w)$

⟨3⟩ CQFD (Ax avec h_2)

⟨1⟩ CQFD ($I_\forall$)

Quantification existentielle : élimination ($E_\exists$)

$\langle 1 \rangle$ supposons $h_1 : \mathrm{inf}(k, z), h_2 : \exists x\, \mathrm{inf}(v, x)$, montrons $\mathrm{inf}(k, w)$

$\langle 2 \rangle$ montrons $\exists x\, \mathrm{inf}(v, x)$

$\langle 2 \rangle$ CQFD (Ax avec h_2)

$\langle 3 \rangle$ soit w, supposons $h_3 : \mathrm{inf}(v, w)$, montrons $\mathrm{inf}(k, w)$

Erreur : w est une variable libre dans la formule à prouver

$\langle 3 \rangle$ CQFD (Ax avec h_2)

$\langle 1 \rangle$ CQFD ($I_\forall$)

Quantification existentielle : élimination ($E_\exists$)

$\langle 1 \rangle$ supposons $h_1 : \mathrm{inf}(k, z), h_2 : \exists x\, \mathrm{inf}(v, x)$, montrons $\mathrm{inf}(k, w)$

$\langle 2 \rangle$ montrons $\exists x\, \mathrm{inf}(v, x)$

$\langle 2 \rangle$ CQFD (Ax avec h_2)

$\langle 3 \rangle$ soit une nouvelle variable y, supposons $h_3 : \mathrm{inf}(v, y)$

montrons $\mathrm{inf}(k, w)$

$\boxed{\cdots ? \cdots}$

$\langle 3 \rangle$ CQFD $(\cdots)$

$\langle 1 \rangle$ CQFD ($I_\forall$)

Quantification existentielle : élimination ($E_\exists$)

pour prouver une propriété B

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$, montrons B
$\langle i \rangle$	CQFD ($E_\exists$)

Quantification existentielle : élimination ($E_\exists$)

pour prouver une propriété B , il suffit de prouver :

- qu'il existe une valeur pour x telle qu'une propriété A soit « vraie » pour cette valeur, c-à-d de prouver $\exists x\ A$,

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$, montrons B

  $\langle i+1 \rangle$ montrons $\exists x\, A(x)$

  $\boxed{\cdots}$

  $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($E_\exists$)

Quantification existentielle : élimination ($E_\exists$)

pour prouver une propriété B , il suffit de prouver :

- qu'il existe une valeur pour x telle qu'une propriété A soit « vraie » pour cette valeur, c-à-d de prouver $\exists x\ A$,
- et de prouver la propriété B en supposant la propriété A « vraie » pour un certain y, **sans rien supposer sur** y, c-à-d de prouver B en supposant $A[x := y]$ avec $y \notin \mathrm{Free}(B) \cup \cup_{i=1}^{n} \mathrm{Free}(A_i)$

$$
\begin{array}{|lll|}
\hline
\langle i \rangle & \multicolumn{2}{l|}{\text{supposons } h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, \text{montrons } B} \\
 & \langle i+1 \rangle & \text{montrons } \exists x\, A(x) \\
 & & \boxed{\cdots} \\
 & \langle i+1 \rangle & \text{CQFD} \\
 & \langle i+2 \rangle & \text{soit une nouvelle variable } y \notin \mathrm{Free}(A) \cup \mathrm{Free}(B) \cup \cup_{i=1}^{n} \mathrm{Free}(A_i) \\
 & & \text{supposons } h : A[x := y], \text{montrons } B \\
 & & \boxed{\cdots} \\
 & \langle i+2 \rangle & \text{CQFD} \\
\langle i \rangle & \multicolumn{2}{l|}{\text{CQFD } (E_\exists)} \\
\hline
\end{array}
$$

Quantification existentielle : élimination ($E_\exists$)

appliquer cette règle nécessite de choisir/trouver une formule A telle que la formule $\exists x\, A$ soit prouvable et telle que B soit prouvable à partir de $A[x := y]$ sans rien supposer sur y

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$, montrons B
$\langle i+1 \rangle$	montrons $\exists x\, A(x)$
	$\boxed{\cdots}$
$\langle i+1 \rangle$	CQFD
$\langle i+2 \rangle$	soit une nouvelle variable $y \notin \mathrm{Free}(A) \cup \mathrm{Free}(B) \cup \cup_{i=1}^{n} \mathrm{Free}(A_i)$
	supposons $h : A[x := y]$, montrons B
	$\boxed{\cdots}$
$\langle i+2 \rangle$	CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD ($E_\exists$)

Quantification existentielle : élimination ($E_\exists$)

appliquer cette règle nécessite de choisir/trouver une formule A telle que la formule $\exists x\, A$ soit prouvable et telle que B soit prouvable à partir de $A[x := y]$ sans rien supposer sur y

la preuve de $\exists x\, A$ ne fournit pas nécessairement la valeur de x pour laquelle A est « vraie » ... par exemple lorsque cette preuve utilise un raisonnement par l'absurde qui prouve une contradiction si l'on suppose que cette valeur n'existe pas, ce qui permet de montrer que cette valeur existe sans pour autant la connaître ... on peut seulement utiliser A pour une valeur sur laquelle on ne peut rien supposer

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$, montrons B

> $\langle i+1 \rangle$ montrons $\exists x\, A(x)$
>
> $\boxed{\cdots}$
>
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

> $\langle i+2 \rangle$ soit une nouvelle variable $y \notin \mathrm{Free}(A) \cup \mathrm{Free}(B) \cup \cup_{i=1}^{n} \mathrm{Free}(A_i)$
> supposons $h : A[x := y]$, montrons B
>
> $\boxed{\cdots}$
>
> $\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($E_\exists$)

Exemple (1)

$\langle 1 \rangle$ montrons $(\forall x\, \neg p(x)) \Rightarrow (\neg \exists x\, p(x))$

$\langle 1 \rangle$ CQFD $(I_{\Rightarrow})$

Exemple (1)

$\langle 1 \rangle$ montrons $(\forall x\, \neg p(x)) \Rightarrow (\neg \exists x\, p(x))$

$\langle 2 \rangle$ supposons $h_1 : \forall x\, \neg p(x)$, montrons $\neg \exists x\, p(x)$

$\langle 2 \rangle$ CQFD $(I_\neg)$

$\langle 1 \rangle$ CQFD $(I_\Rightarrow)$

Exemple (1)

$\langle 1 \rangle$ montrons $(\forall x\, \neg p(x)) \Rightarrow (\neg \exists x\, p(x))$

$\langle 2 \rangle$ supposons $h_1 : \forall x\, \neg p(x)$, montrons $\neg \exists x\, p(x)$

$\langle 3 \rangle$ supposons $h_2 : \exists x\, p(x)$, montrons false

$\langle 3 \rangle$ CQFD $(E_\exists)$

$\langle 2 \rangle$ CQFD $(I_\neg)$

$\langle 1 \rangle$ CQFD $(I_\Rightarrow)$

Exemple (1)

$\langle 1 \rangle$ montrons $(\forall x\, \neg p(x)) \Rightarrow (\neg \exists x\, p(x))$

$\langle 2 \rangle$ supposons $h_1 : \forall x\, \neg p(x)$, montrons $\neg \exists x\, p(x)$

$\langle 3 \rangle$ supposons $h_2 : \exists x\, p(x)$, montrons false

$\langle 4 \rangle$ montrons $\exists x\, p(x)$

$\langle 4 \rangle$ CQFD (Ax avec h_2)

$\langle 3 \rangle$ CQFD $(E_\exists)$

$\langle 2 \rangle$ CQFD $(I_\neg)$

$\langle 1 \rangle$ CQFD $(I_\Rightarrow)$

Exemple (1)

$\langle 1 \rangle$ montrons $(\forall x \, \neg p(x)) \Rightarrow (\neg \exists x \, p(x))$

$\langle 2 \rangle$ supposons $h_1 : \forall x \, \neg p(x)$, montrons $\neg \exists x \, p(x)$

$\langle 3 \rangle$ supposons $h_2 : \exists x \, p(x)$, montrons false

$\langle 4 \rangle$ montrons $\exists x \, p(x)$

$\langle 4 \rangle$ CQFD (Ax avec h_2)

$\langle 5 \rangle$ soit une nouvelle variable y, supposons $h_3 : p(y)$

$(p(x))[x := y] = p(y)$

$\langle 5 \rangle$ CQFD $(E_\neg)$

$\langle 3 \rangle$ CQFD $(E_\exists)$

$\langle 2 \rangle$ CQFD $(I_\neg)$

$\langle 1 \rangle$ CQFD $(I_\Rightarrow)$

Exemple (1)

$\langle 1 \rangle$ montrons $(\forall x\, \neg p(x)) \Rightarrow (\neg \exists x\, p(x))$

$\langle 2 \rangle$ supposons $h_1 : \forall x\, \neg p(x)$, montrons $\neg \exists x\, p(x)$

$\langle 3 \rangle$ supposons $h_2 : \exists x\, p(x)$, montrons false

$\langle 4 \rangle$ montrons $\exists x\, p(x)$

$\langle 4 \rangle$ CQFD (Ax avec h_2)

$\langle 5 \rangle$ soit une nouvelle variable y, supposons $h_3 : p(y)$

montrons false

$(p(x))[x := y] = p(y)$

$\langle 5 \rangle$ CQFD $(E_\neg)$

$\langle 3 \rangle$ CQFD $(E_\exists)$

$\langle 2 \rangle$ CQFD $(I_\neg)$

$\langle 1 \rangle$ CQFD $(I_\Rightarrow)$

Exemple (1)

$\langle 1 \rangle$ montrons $(\forall x\, \neg p(x)) \Rightarrow (\neg \exists x\, p(x))$

$\langle 2 \rangle$ supposons $h_1 : \forall x\, \neg p(x)$, montrons $\neg \exists x\, p(x)$

$\langle 3 \rangle$ supposons $h_2 : \exists x\, p(x)$, montrons false

$\langle 4 \rangle$ montrons $\exists x\, p(x)$

$\langle 4 \rangle$ CQFD (Ax avec h_2)

$\langle 5 \rangle$ soit une nouvelle variable y, supposons $h_3 : p(y)$

montrons false $\quad (p(x))[x := y] = p(y)$

$\langle 6 \rangle$ montrons $\neg p(y)$ $\quad (\neg p(x))[x := y] = \neg p(y)$

$\langle 6 \rangle$ CQFD ($E_\forall$)

$\langle 5 \rangle$ CQFD ($E_\neg$)

$\langle 3 \rangle$ CQFD ($E_\exists$)

$\langle 2 \rangle$ CQFD ($I_\neg$)

$\langle 1 \rangle$ CQFD ($I_\Rightarrow$)

Exemple (1)

$\langle 1 \rangle$ montrons $(\forall x\, \neg p(x)) \Rightarrow (\neg \exists x\, p(x))$

$\langle 2 \rangle$ supposons $h_1 : \forall x\, \neg p(x)$, montrons $\neg \exists x\, p(x)$

$\langle 3 \rangle$ supposons $h_2 : \exists x\, p(x)$, montrons false

$\langle 4 \rangle$ montrons $\exists x\, p(x)$

$\langle 4 \rangle$ CQFD (Ax avec h_2)

$\langle 5 \rangle$ soit une nouvelle variable y, supposons $h_3 : p(y)$

montrons false

$(p(x))[x := y] = p(y)$

$\langle 6 \rangle$ montrons $\neg p(y)$

$(\neg p(x))[x := y] = \neg p(y)$

$\langle 7 \rangle$ montrons $\forall x\, \neg p(x)$

$\langle 7 \rangle$ CQFD (Ax avec h_1)

$\langle 6 \rangle$ CQFD ($E_\forall$)

$\langle 5 \rangle$ CQFD ($E_\neg$)

$\langle 3 \rangle$ CQFD ($E_\exists$)

$\langle 2 \rangle$ CQFD ($I_\neg$)

$\langle 1 \rangle$ CQFD ($I_\Rightarrow$)

Exemple (1)

$\langle 1 \rangle$ montrons $(\forall x\, \neg p(x)) \Rightarrow (\neg \exists x\, p(x))$

$\langle 2 \rangle$ supposons $h_1 : \forall x\, \neg p(x)$, montrons $\neg \exists x\, p(x)$

$\langle 3 \rangle$ supposons $h_2 : \exists x\, p(x)$, montrons false

$\langle 4 \rangle$ montrons $\exists x\, p(x)$

$\langle 4 \rangle$ CQFD (Ax avec h_2)

$\langle 5 \rangle$ soit une nouvelle variable y, supposons $h_3 : p(y)$

montrons false

$(p(x))[x := y] = p(y)$

$\langle 6 \rangle$ montrons $\neg p(y)$

$(\neg p(x))[x := y] = \neg p(y)$

$\langle 7 \rangle$ montrons $\forall x\, \neg p(x)$

$\langle 7 \rangle$ CQFD (Ax avec h_1)

$\langle 6 \rangle$ CQFD ($E_\forall$)

$\langle 7 \rangle$ montrons $p(y)$

$\langle 7 \rangle$ CQFD (Ax avec h_3)

$\langle 5 \rangle$ CQFD ($E_\neg$)

$\langle 3 \rangle$ CQFD ($E_\exists$)

$\langle 2 \rangle$ CQFD ($I_\neg$)

$\langle 1 \rangle$ CQFD ($I_\Rightarrow$)

Exemple (2)

$\langle 1 \rangle$ montrons $(\neg\exists x\, p(x)) \Rightarrow (\forall x\, \neg p(x))$

$\langle 1 \rangle$ CQFD $(I_{\Rightarrow})$

Exemple (2)

$\langle 1 \rangle$ montrons $(\neg\exists x\, p(x)) \Rightarrow (\forall x\, \neg p(x))$

$\langle 2 \rangle$ supposons $h_1 : \neg\exists x\, p(x)$, montrons $\forall x\, \neg p(x)$

$\langle 2 \rangle$ CQFD $(I_\forall)$

$\langle 1 \rangle$ CQFD $(I_\Rightarrow)$

Exemple (2)

$\langle 1 \rangle$ montrons $(\neg\exists x\, p(x)) \Rightarrow (\forall x\, \neg p(x))$

$\langle 2 \rangle$ supposons $h_1 : \neg\exists x\, p(x)$, montrons $\forall x\, \neg p(x)$

$\langle 3 \rangle$ soit une nouvelle variable y

montrons $\neg p(y)$

$(\neg p(x))[x := y] = \neg p(y)$

$\langle 3 \rangle$ CQFD $(I_{\neg})$

$\langle 2 \rangle$ CQFD $(I_{\forall})$

$\langle 1 \rangle$ CQFD $(I_{\Rightarrow})$

Exemple (2)

⟨1⟩ montrons $(\neg\exists x\, p(x)) \Rightarrow (\forall x\, \neg p(x))$

⟨2⟩ supposons $h_1 : \neg\exists x\, p(x)$, montrons $\forall x\, \neg p(x)$

⟨3⟩ soit une nouvelle variable y

montrons $\neg p(y)$ $(\neg p(x))[x := y] = \neg p(y)$

⟨4⟩ supposons $h_2 : p(y)$, montrons false

⟨4⟩ CQFD $(E_\neg)$

⟨3⟩ CQFD $(I_\neg)$

⟨2⟩ CQFD $(I_\forall)$

⟨1⟩ CQFD $(I_\Rightarrow)$

Exemple (2)

$\langle 1 \rangle$ montrons $(\neg\exists x\, p(x)) \Rightarrow (\forall x\, \neg p(x))$

$\langle 2 \rangle$ supposons $h_1 : \neg\exists x\, p(x)$, montrons $\forall x\, \neg p(x)$

$\langle 3 \rangle$ soit une nouvelle variable y

montrons $\neg p(y)$ $(\neg p(x))[x := y] = \neg p(y)$

$\langle 4 \rangle$ supposons $h_2 : p(y)$, montrons false

$\langle 5 \rangle$ montrons $\neg\exists x\, p(x)$

$\langle 5 \rangle$ CQFD (Ax avec h_1)

$\langle 4 \rangle$ CQFD ($E_\neg$)

$\langle 3 \rangle$ CQFD ($I_\neg$)

$\langle 2 \rangle$ CQFD ($I_\forall$)

$\langle 1 \rangle$ CQFD ($I_\Rightarrow$)

Exemple (2)

⟨1⟩ montrons $(\neg\exists x\, p(x)) \Rightarrow (\forall x\, \neg p(x))$

⟨2⟩ supposons $h_1 : \neg\exists x\, p(x)$, montrons $\forall x\, \neg p(x)$

⟨3⟩ soit une nouvelle variable y

montrons $\neg p(y)$ $\quad$ $(\neg p(x))[x := y] = \neg p(y)$

⟨4⟩ supposons $h_2 : p(y)$, montrons false

⟨5⟩ montrons $\neg\exists x\, p(x)$

⟨5⟩ CQFD (Ax avec h_1)

⟨6⟩ montrons $\exists x\, p(x)$ $\quad$ $(p(x))[x := y] = p(y)$

⟨6⟩ CQFD ($I_\exists$)

⟨4⟩ CQFD ($E_\neg$)

⟨3⟩ CQFD ($I_\neg$)

⟨2⟩ CQFD ($I_\forall$)

⟨1⟩ CQFD ($I_\Rightarrow$)

Exemple (2)

$\langle 1 \rangle$ montrons $(\neg\exists x\, p(x)) \Rightarrow (\forall x\, \neg p(x))$

$\langle 2 \rangle$ supposons $h_1 : \neg\exists x\, p(x)$, montrons $\forall x\, \neg p(x)$

$\langle 3 \rangle$ soit une nouvelle variable y

montrons $\neg p(y)$ $\quad (\neg p(x))[x := y] = \neg p(y)$

$\langle 4 \rangle$ supposons $h_2 : p(y)$, montrons false

$\langle 5 \rangle$ montrons $\neg\exists x\, p(x)$

$\langle 5 \rangle$ CQFD $(\mathrm{Ax}$ avec $h_1)$

$\langle 6 \rangle$ montrons $\exists x\, p(x)$ $\quad (p(x))[x := y] = p(y)$

$\langle 7 \rangle$ montrons $p(y)$

$\langle 7 \rangle$ CQFD $(\mathrm{Ax}$ avec $h_2)$

$\langle 6 \rangle$ CQFD $(I_\exists)$

$\langle 4 \rangle$ CQFD $(E_\neg)$

$\langle 3 \rangle$ CQFD $(I_\neg)$

$\langle 2 \rangle$ CQFD $(I_\forall)$

$\langle 1 \rangle$ CQFD $(I_\Rightarrow)$

Exemple (2)

⟨1⟩ montrons $(\neg\exists x\, p(x)) \Rightarrow (\forall x\, \neg p(x))$

⟨2⟩ supposons $h_1 : \neg\exists x\, p(x)$, montrons $\forall x\, \neg p(x)$

⟨3⟩ soit une nouvelle variable y

montrons $\neg p(y)$ $\quad (\neg p(x))[x := y] = \neg p(y)$

⟨4⟩ supposons $h_2 : p(y)$, montrons false

⟨5⟩ montrons $\neg\exists x\, p(x)$

⟨5⟩ CQFD (Ax avec h_1)

⟨6⟩ montrons $\exists x\, p(x)$ $\quad (p(x))[x := y] = p(y)$

⟨7⟩ montrons $p(y)$

⟨7⟩ CQFD (Ax avec h_2)

⟨6⟩ CQFD ($I_\exists$)

⟨4⟩ CQFD ($E_\neg$)

⟨3⟩ CQFD ($I_\neg$)

⟨2⟩ CQFD ($I_\forall$)

⟨1⟩ CQFD ($I_\Rightarrow$)