

Cours 3

Interprétation : fonctions, prédicats et connecteurs

Logique – Licence Informatique



Syntaxe *versus* sémantique

- les connecteurs logiques \neg , \Rightarrow , \wedge et \vee sont des **opérateurs syntaxiques** permettant de construire des formules à partir d'autres formules

Syntaxe *versus* sémantique

- les connecteurs logiques \neg , \Rightarrow , \wedge et \vee sont des **opérateurs syntaxiques** permettant de construire des formules à partir d'autres formules
 - ▶ ils n'ont pas (encore) de signification :
 - ★ connecteur : constructeur de formules
 - ★ syntaxiquement une formule n'a pas de valeur autre qu'elle-même

Syntaxe *versus* sémantique

- les connecteurs logiques \neg , \Rightarrow , \wedge et \vee sont des **opérateurs syntaxiques** permettant de construire des formules à partir d'autres formules
 - ils n'ont pas (encore) de signification :
 - ★ connecteur : constructeur de formules
 - ★ syntaxiquement une formule n'a pas de valeur autre qu'elle-même
- égalité syntaxique** : deux formules sont syntaxiquement égales ssi elles ont été obtenues en appliquant les mêmes connecteurs sur des (sous-)formules syntaxiquement égales

$true = true$	$true \neq \neg false$
$\neg(F_1 \vee F_2) = \neg(F_1 \vee F_2)$	$\neg(F_1 \vee F_2) \neq \neg F_1 \wedge \neg F_2$
$F \vee \neg F = F \vee \neg F$	$F \vee \neg F \neq true$
$F \wedge \neg F = F \wedge \neg F$	$F \wedge \neg F \neq false$

Syntaxe *versus* sémantique

- les connecteurs logiques \neg , \Rightarrow , \wedge et \vee sont des **opérateurs syntaxiques** permettant de construire des formules à partir d'autres formules
 - ils n'ont pas (encore) de signification :
 - ★ connecteur : constructeur de formules
 - ★ syntaxiquement une formule n'a pas de valeur autre qu'elle-même
- égalité syntaxique** : deux formules sont syntaxiquement égales ssi elles ont été obtenues en appliquant les mêmes connecteurs sur des (sous-)formules syntaxiquement égales

$$\begin{array}{l|l}
 \text{true} = \text{true} & \text{true} \neq \neg \text{false} \\
 \neg(F_1 \vee F_2) = \neg(F_1 \vee F_2) & \neg(F_1 \vee F_2) \neq \neg F_1 \wedge \neg F_2 \\
 F \vee \neg F = F \vee \neg F & F \vee \neg F \neq \text{true} \\
 F \wedge \neg F = F \wedge \neg F & F \wedge \neg F \neq \text{false}
 \end{array}$$

- comment caractériser les formules « sémantiquement équivalentes » ?

Syntaxe *versus* sémantique

- les connecteurs logiques \neg , \Rightarrow , \wedge et \vee sont des **opérateurs syntaxiques** permettant de construire des formules à partir d'autres formules
 - ils n'ont pas (encore) de signification :
 - ★ connecteur : constructeur de formules
 - ★ syntaxiquement une formule n'a pas de valeur autre qu'elle-même
- égalité syntaxique** : deux formules sont syntaxiquement égales ssi elles ont été obtenues en appliquant les mêmes connecteurs sur des (sous-)formules syntaxiquement égales

$$\begin{array}{l|l}
 \text{true} = \text{true} & \text{true} \neq \neg \text{false} \\
 \neg(F_1 \vee F_2) = \neg(F_1 \vee F_2) & \neg(F_1 \vee F_2) \neq \neg F_1 \wedge \neg F_2 \\
 F \vee \neg F = F \vee \neg F & F \vee \neg F \neq \text{true} \\
 F \wedge \neg F = F \wedge \neg F & F \wedge \neg F \neq \text{false}
 \end{array}$$

- comment caractériser les formules « sémantiquement équivalentes » ?
- comment associer une « valeur de vérité » aux formules ?

Syntaxe *versus* sémantique

- les connecteurs logiques \neg , \Rightarrow , \wedge et \vee sont des **opérateurs syntaxiques** permettant de construire des formules à partir d'autres formules
 - ils n'ont pas (encore) de signification :
 - ★ connecteur : constructeur de formules
 - ★ syntaxiquement une formule n'a pas de valeur autre qu'elle-même
- égalité syntaxique** : deux formules sont syntaxiquement égales ssi elles ont été obtenues en appliquant les mêmes connecteurs sur des (sous-)formules syntaxiquement égales

$$\begin{array}{l|l}
 \text{true} = \text{true} & \text{true} \neq \neg \text{false} \\
 \neg(F_1 \vee F_2) = \neg(F_1 \vee F_2) & \neg(F_1 \vee F_2) \neq \neg F_1 \wedge \neg F_2 \\
 F \vee \neg F = F \vee \neg F & F \vee \neg F \neq \text{true} \\
 F \wedge \neg F = F \wedge \neg F & F \wedge \neg F \neq \text{false}
 \end{array}$$

- comment caractériser les formules « sémantiquement équivalentes » ?
- comment associer une « valeur de vérité » aux formules ?
- comment identifier les formules « toujours vraies » ?

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer une **valeur booléenne** appartenant à $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer une **valeur booléenne** appartenant à $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

- 1 donner une valeur aux termes apparaissant dans F

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer une **valeur booléenne** appartenant à $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

- 1 donner une valeur aux termes apparaissant dans F
 - ▶ interpréter les termes de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ par des valeurs appartenant à un certain ensemble : le **domaine d'interprétation**

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer une **valeur booléenne** appartenant à $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

- 1 donner une valeur aux termes apparaissant dans F
 - ▶ interpréter les termes de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ par des valeurs appartenant à un certain ensemble : le **domaine d'interprétation**
- 2 associer un **booléen** (une valeur de \mathbb{B}) à chaque formule atomique de $\mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer une **valeur booléenne** appartenant à $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

- 1 donner une valeur aux termes apparaissant dans F
 - ▶ interpréter les termes de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ par des valeurs appartenant à un certain ensemble : le **domaine d'interprétation**
- 2 associer un **booléen** (une valeur de \mathbb{B}) à chaque formule atomique de $\mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$
 - ▶ interpréter les symboles de prédicat de \mathcal{P}

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer une **valeur booléenne** appartenant à $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

- 1 donner une valeur aux termes apparaissant dans F
 - ▶ interpréter les termes de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ par des valeurs appartenant à un certain ensemble : le **domaine d'interprétation**
- 2 associer un **booléen** (une valeur de \mathbb{B}) à chaque formule atomique de $\mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$
 - ▶ interpréter les symboles de prédicat de \mathcal{P}
- 3 associer une **expression booléenne** à la formule F

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer une **valeur booléenne** appartenant à $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

- 1 donner une valeur aux termes apparaissant dans F
 - ▶ interpréter les termes de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ par des valeurs appartenant à un certain ensemble : le **domaine d'interprétation**
- 2 associer un **booléen** (une valeur de \mathbb{B}) à chaque formule atomique de $\mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$
 - ▶ interpréter les symboles de prédicat de \mathcal{P}
- 3 associer une **expression booléenne** à la formule F
 - ▶ interpréter les connecteurs logiques par des **opérations booléennes**

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer une **valeur booléenne** appartenant à $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

- 1 donner une valeur aux termes apparaissant dans F
 - ▶ interpréter les termes de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ par des valeurs appartenant à un certain ensemble : le **domaine d'interprétation**
- 2 associer un **booléen** (une valeur de \mathbb{B}) à chaque formule atomique de $\mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$
 - ▶ interpréter les symboles de prédicat de \mathcal{P}
- 3 associer une **expression booléenne** à la formule F
 - ▶ interpréter les connecteurs logiques par des **opérations booléennes**
- 4 **évaluer** l'expression booléenne

Interprétation des termes : entiers de Peano

- entiers de Peano : $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ ($\mathcal{F}_0 = \{Z\}$, $\mathcal{F}_1 = \{S\}$)

Interprétation des termes : entiers de Peano

- entiers de Peano : $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ ($\mathcal{F}_0 = \{Z\}$, $\mathcal{F}_1 = \{S\}$)
- domaine d'interprétation des entiers de Peano : entiers naturels
 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

Interprétation des termes : entiers de Peano

- entiers de Peano : $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ ($\mathcal{F}_0 = \{Z\}$, $\mathcal{F}_1 = \{S\}$)
- domaine d'interprétation des entiers de Peano : entiers naturels
 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- structure **M** permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F}

Interprétation des termes : entiers de Peano

- entiers de Peano : $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ ($\mathcal{F}_0 = \{Z\}$, $\mathcal{F}_1 = \{S\}$)
- domaine d'interprétation des entiers de Peano : entiers naturels
 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- structure **M** permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F}
 - constante $Z \in \mathcal{F}_0$ interprétée par l'entier $Z^M = 0 \in \mathbb{N}$

Interprétation des termes : entiers de Peano

- entiers de Peano : $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ ($\mathcal{F}_0 = \{Z\}$, $\mathcal{F}_1 = \{S\}$)
- domaine d'interprétation des entiers de Peano : entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- structure **M** permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F}
 - ▶ constante $Z \in \mathcal{F}_0$ interprétée par l'entier $Z^M = 0 \in \mathbb{N}$
 - ▶ symbole de fonction $S \in \mathcal{F}_1$
 - ★ constructeur unaire de terme $S : \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$
 - ★ interprété par une fonction unaire $S^M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $S^M(x) = x + 1$

Interprétation des termes : entiers de Peano

- entiers de Peano : $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ ($\mathcal{F}_0 = \{Z\}$, $\mathcal{F}_1 = \{S\}$)
- domaine d'interprétation des entiers de Peano : entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- structure **M** permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F}
 - ▶ constante $Z \in \mathcal{F}_0$ interprétée par l'entier $Z^{\mathbf{M}} = 0 \in \mathbb{N}$
 - ▶ symbole de fonction $S \in \mathcal{F}_1$
 - ★ constructeur unaire de terme $S : \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$
 - ★ interprété par une fonction unaire $S^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $S^{\mathbf{M}}(x) = x + 1$
- interprétation des termes : $[t]^{\mathbf{M}} = \begin{cases} Z^{\mathbf{M}} = 0 & \text{si } t = 0 \\ S^{\mathbf{M}}([t']^{\mathbf{M}}) = [t']^{\mathbf{M}} + 1 & \text{si } t = S(t') \end{cases}$

Interprétation des termes : entiers de Peano

- entiers de Peano : $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ ($\mathcal{F}_0 = \{Z\}$, $\mathcal{F}_1 = \{S\}$)
- domaine d'interprétation des entiers de Peano : entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- structure **M** permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F}
 - ▶ constante $Z \in \mathcal{F}_0$ interprétée par l'entier $Z^M = 0 \in \mathbb{N}$
 - ▶ symbole de fonction $S \in \mathcal{F}_1$
 - ★ constructeur unaire de terme $S : \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$
 - ★ interprété par une fonction unaire $S^M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $S^M(x) = x + 1$
- interprétation des termes : $[t]^M = \begin{cases} Z^M = 0 & \text{si } t = 0 \\ S^M([t']^M) = [t']^M + 1 & \text{si } t = S(t') \end{cases}$
- *exemple* : $[S(S(Z))]^M$

Interprétation des termes : entiers de Peano

- entiers de Peano : $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ ($\mathcal{F}_0 = \{Z\}$, $\mathcal{F}_1 = \{S\}$)
- domaine d'interprétation des entiers de Peano : entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- structure **M** permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F}
 - ▶ constante $Z \in \mathcal{F}_0$ interprétée par l'entier $Z^M = 0 \in \mathbb{N}$
 - ▶ symbole de fonction $S \in \mathcal{F}_1$
 - ★ constructeur unaire de terme $S : \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$
 - ★ interprété par une fonction unaire $S^M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $S^M(x) = x + 1$
- interprétation des termes : $[t]^M = \begin{cases} Z^M = 0 & \text{si } t = 0 \\ S^M([t']^M) = [t']^M + 1 & \text{si } t = S(t') \end{cases}$
- *exemple* : $[S(S(Z))]^M = S^M([S(Z)]^M)$

Interprétation des termes : entiers de Peano

- entiers de Peano : $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ ($\mathcal{F}_0 = \{Z\}$, $\mathcal{F}_1 = \{S\}$)
- domaine d'interprétation des entiers de Peano : entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- structure **M** permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F}
 - constante $Z \in \mathcal{F}_0$ interprétée par l'entier $Z^M = 0 \in \mathbb{N}$
 - symbole de fonction $S \in \mathcal{F}_1$
 - constructeur unaire de terme $S : \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$
 - interprété par une fonction unaire $S^M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $S^M(x) = x + 1$
- interprétation des termes : $[t]^M = \begin{cases} Z^M = 0 & \text{si } t = 0 \\ S^M([t']^M) = [t']^M + 1 & \text{si } t = S(t') \end{cases}$
- exemple* : $[S(S(Z))]^M = S^M([S(Z)]^M) = S^M(S^M([Z]^M))$

Interprétation des termes : entiers de Peano

- entiers de Peano : $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ ($\mathcal{F}_0 = \{Z\}$, $\mathcal{F}_1 = \{S\}$)
- domaine d'interprétation des entiers de Peano : entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- structure \mathbf{M} permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F}
 - ▶ constante $Z \in \mathcal{F}_0$ interprétée par l'entier $Z^{\mathbf{M}} = 0 \in \mathbb{N}$
 - ▶ symbole de fonction $S \in \mathcal{F}_1$
 - ★ constructeur unaire de terme $S : \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$
 - ★ interprété par une fonction unaire $S^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $S^{\mathbf{M}}(x) = x + 1$
- interprétation des termes : $[t]^{\mathbf{M}} = \begin{cases} Z^{\mathbf{M}} = 0 & \text{si } t = 0 \\ S^{\mathbf{M}}([t']^{\mathbf{M}}) = [t']^{\mathbf{M}} + 1 & \text{si } t = S(t') \end{cases}$
- *exemple* : $[S(S(Z))]^{\mathbf{M}} = S^{\mathbf{M}}([S(Z)]^{\mathbf{M}}) = S^{\mathbf{M}}(S^{\mathbf{M}}([Z]^{\mathbf{M}})) = S^{\mathbf{M}}(S^{\mathbf{M}}(Z^{\mathbf{M}}))$

Interprétation des termes : entiers de Peano

- entiers de Peano : $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ ($\mathcal{F}_0 = \{Z\}$, $\mathcal{F}_1 = \{S\}$)
- domaine d'interprétation des entiers de Peano : entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- structure \mathbf{M} permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F}
 - constante $Z \in \mathcal{F}_0$ interprétée par l'entier $Z^{\mathbf{M}} = 0 \in \mathbb{N}$
 - symbole de fonction $S \in \mathcal{F}_1$
 - constructeur unaire de terme $S : \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$
 - interprété par une fonction unaire $S^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $S^{\mathbf{M}}(x) = x + 1$
- interprétation des termes : $[t]^{\mathbf{M}} = \begin{cases} Z^{\mathbf{M}} = 0 & \text{si } t = 0 \\ S^{\mathbf{M}}([t']^{\mathbf{M}}) = [t']^{\mathbf{M}} + 1 & \text{si } t = S(t') \end{cases}$
- exemple* : $[S(S(Z))]^{\mathbf{M}} = S^{\mathbf{M}}([S(Z)]^{\mathbf{M}}) = S^{\mathbf{M}}(S^{\mathbf{M}}([Z]^{\mathbf{M}})) = S^{\mathbf{M}}(S^{\mathbf{M}}(Z^{\mathbf{M}})) = S^{\mathbf{M}}(S^{\mathbf{M}}(0))$

Interprétation des termes : entiers de Peano

- entiers de Peano : $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ ($\mathcal{F}_0 = \{Z\}$, $\mathcal{F}_1 = \{S\}$)
- domaine d'interprétation des entiers de Peano : entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- structure \mathbf{M} permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F}
 - constante $Z \in \mathcal{F}_0$ interprétée par l'entier $Z^{\mathbf{M}} = 0 \in \mathbb{N}$
 - symbole de fonction $S \in \mathcal{F}_1$
 - constructeur unaire de terme $S : \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$
 - interprété par une fonction unaire $S^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $S^{\mathbf{M}}(x) = x + 1$
- interprétation des termes : $[t]^{\mathbf{M}} = \begin{cases} Z^{\mathbf{M}} = 0 & \text{si } t = 0 \\ S^{\mathbf{M}}([t']^{\mathbf{M}}) = [t']^{\mathbf{M}} + 1 & \text{si } t = S(t') \end{cases}$
- exemple* : $[S(S(Z))]^{\mathbf{M}} = S^{\mathbf{M}}([S(Z)]^{\mathbf{M}}) = S^{\mathbf{M}}(S^{\mathbf{M}}([Z]^{\mathbf{M}})) = S^{\mathbf{M}}(S^{\mathbf{M}}(Z^{\mathbf{M}})) = S^{\mathbf{M}}(S^{\mathbf{M}}(0)) = S^{\mathbf{M}}(0 + 1) = S^{\mathbf{M}}(1) = 1 + 1 = 2$

Interprétation des termes : expressions arithmétiques

- expressions arithmétiques : $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$
($\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \otimes\}$)

Interprétation des termes : expressions arithmétiques

- expressions arithmétiques : $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$
($\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \otimes\}$)
- domaine d'interprétation : \mathbb{Z} (entiers relatifs)

Interprétation des termes : expressions arithmétiques

- expressions arithmétiques : $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$
($\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \otimes\}$)
- domaine d'interprétation : \mathbb{Z} (entiers relatifs)
- structure **M** permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F}
 - ▶ chaque constante $k \in \mathcal{F}_0$ est interprétée par l'entier relatif $k^{\mathbf{M}} = k \in \mathbb{Z}$

Interprétation des termes : expressions arithmétiques

- expressions arithmétiques : $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$
($\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \otimes\}$)
- domaine d'interprétation : \mathbb{Z} (entiers relatifs)
- structure **M** permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F}
 - ▶ chaque constante $k \in \mathcal{F}_0$ est interprétée par l'entier relatif $k^{\mathbf{M}} = k \in \mathbb{Z}$
 - ★ *exemple* : la valeur de l'expression **8** est l'entier relatif **8**

Interprétation des termes : expressions arithmétiques

- expressions arithmétiques : $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$
($\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \otimes\}$)
- domaine d'interprétation : \mathbb{Z} (entiers relatifs)
- structure **M** permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F}
 - ▶ chaque constante $k \in \mathcal{F}_0$ est interprétée par l'entier relatif $k^{\mathbf{M}} = k \in \mathbb{Z}$
 - ★ *exemple* : la valeur de l'expression **8** est l'entier relatif **8**
 - ▶ interprétation des symboles de fonction de \mathcal{F}_2
 - ★ $\oplus : \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \times \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$: opérateur binaire de construction d'expressions arithmétiques

Interprétation des termes : expressions arithmétiques

- expressions arithmétiques : $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$
($\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \otimes\}$)
- domaine d'interprétation : \mathbb{Z} (entiers relatifs)
- structure **M** permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F}
 - ▶ chaque constante $k \in \mathcal{F}_0$ est interprétée par l'entier relatif $k^{\mathbf{M}} = k \in \mathbb{Z}$
 - ★ *exemple* : la valeur de l'expression **8** est l'entier relatif **8**
 - ▶ interprétation des symboles de fonction de \mathcal{F}_2
 - ★ $\oplus : \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \times \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$: opérateur binaire de construction d'expressions arithmétiques
interprété par l'opérateur binaire $\oplus^{\mathbf{M}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ d'addition de deux entiers relatifs ($\oplus^{\mathbf{M}} = +$)

Interprétation des termes : expressions arithmétiques

- expressions arithmétiques : $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$
 $(\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}, \mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \otimes\})$
- domaine d'interprétation : \mathbb{Z} (entiers relatifs)
- structure **M** permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F}
 - ▶ chaque constante $k \in \mathcal{F}_0$ est interprétée par l'entier relatif $k^{\mathbf{M}} = k \in \mathbb{Z}$
 - ★ *exemple* : la valeur de l'expression **8** est l'entier relatif **8**
 - ▶ interprétation des symboles de fonction de \mathcal{F}_2
 - ★ $\oplus : \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \times \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$: opérateur binaire de construction d'expressions arithmétiques
 interprété par l'opérateur binaire $\oplus^{\mathbf{M}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ d'addition de deux entiers relatifs ($\oplus^{\mathbf{M}} = +$)
 - ★ $\ominus, \otimes \dots$

Interprétation des termes : expressions arithmétiques

- expressions arithmétiques : $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$
($\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \otimes\}$)
- domaine d'interprétation : \mathbb{Z} (entiers relatifs)
- structure **M** permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F}
- interprétation des termes

$$[t]^{\mathbf{M}} = \begin{cases} k^{\mathbf{M}} = k & \text{si } t = k \in \mathcal{F}_0 \end{cases}$$

Interprétation des termes : expressions arithmétiques

- expressions arithmétiques : $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$
($\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \otimes\}$)
- domaine d'interprétation : \mathbb{Z} (entiers relatifs)
- structure **M** permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F}
- interprétation des termes

$$[t]^{\mathbf{M}} = \begin{cases} k^{\mathbf{M}} = k & \text{si } t = k \in \mathcal{F}_0 \\ \oplus^{\mathbf{M}}([t_1]^{\mathbf{M}}, [t_2]^{\mathbf{M}}) = [t_1]^{\mathbf{M}} + [t_2]^{\mathbf{M}} & \text{si } t = \oplus(t_1, t_2) \\ \dots & \dots \end{cases}$$

- exemple :*

$$[\oplus(\ominus(8, 3), \ominus(5, 1))]^{\mathbf{M}}$$

Interprétation des termes : expressions arithmétiques

- expressions arithmétiques : $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$
($\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \otimes\}$)
- domaine d'interprétation : \mathbb{Z} (entiers relatifs)
- structure **M** permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F}
- interprétation des termes

$$[t]^{\mathbf{M}} = \begin{cases} k^{\mathbf{M}} = k & \text{si } t = k \in \mathcal{F}_0 \\ \oplus^{\mathbf{M}}([t_1]^{\mathbf{M}}, [t_2]^{\mathbf{M}}) = [t_1]^{\mathbf{M}} + [t_2]^{\mathbf{M}} & \text{si } t = \oplus(t_1, t_2) \\ \dots & \dots \end{cases}$$

- exemple :*

$$\begin{aligned} & [\oplus(\ominus(8, 3), \ominus(5, 1))]^{\mathbf{M}} \\ = & \oplus^{\mathbf{M}}([\ominus(8, 3)]^{\mathbf{M}}, [\ominus(5, 1)]^{\mathbf{M}}) = [\ominus(8, 3)]^{\mathbf{M}} + [\ominus(5, 1)]^{\mathbf{M}} \end{aligned}$$

Interprétation des termes : expressions arithmétiques

- expressions arithmétiques : $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$
($\mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_2 = \{\oplus, \ominus, \otimes\}$)
- domaine d'interprétation : \mathbb{Z} (entiers relatifs)
- structure \mathbf{M} permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F}
- interprétation des termes

$$[t]^{\mathbf{M}} = \begin{cases} k^{\mathbf{M}} = k & \text{si } t = k \in \mathcal{F}_0 \\ \oplus^{\mathbf{M}}([t_1]^{\mathbf{M}}, [t_2]^{\mathbf{M}}) = [t_1]^{\mathbf{M}} + [t_2]^{\mathbf{M}} & \text{si } t = \oplus(t_1, t_2) \\ \dots & \dots \end{cases}$$

- exemple :*

$$\begin{aligned} & [\oplus(\ominus(8, 3), \ominus(5, 1))]^{\mathbf{M}} \\ &= \oplus^{\mathbf{M}}([\ominus(8, 3)]^{\mathbf{M}}, [\ominus(5, 1)]^{\mathbf{M}}) = [\ominus(8, 3)]^{\mathbf{M}} + [\ominus(5, 1)]^{\mathbf{M}} \\ &= \ominus^{\mathbf{M}}([8]^{\mathbf{M}}, [3]^{\mathbf{M}}) + \ominus^{\mathbf{M}}([5]^{\mathbf{M}}, [1]^{\mathbf{M}}) = (8 - 3) + (5 - 1) = 9 \end{aligned}$$

Interprétation des termes de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$

- structure **M** permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F}

Interprétation des termes de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$

- structure **M** permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F}
 - ▶ domaine d'interprétation $|M|$ (ensemble non vide)

Interprétation des termes de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$

- structure \mathbf{M} permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F}
 - ▶ domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$ (ensemble non vide)
 - ▶ associe à chaque constante $k \in \mathcal{F}_0$ un élément $k^{\mathbf{M}} \in |\mathbf{M}|$

Interprétation des termes de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$

- structure \mathbf{M} permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F}
 - ▶ domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$ (ensemble non vide)
 - ▶ associe à chaque constante $k \in \mathcal{F}_0$ un élément $k^{\mathbf{M}} \in |\mathbf{M}|$
 - ▶ associe à chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{F}_n$ d'arité n , une fonction n -aire $f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}|^n \rightarrow |\mathbf{M}|$

Interprétation des termes de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$

- structure \mathbf{M} permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F}
 - ▶ domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$ (ensemble non vide)
 - ▶ associe à chaque constante $k \in \mathcal{F}_0$ un élément $k^{\mathbf{M}} \in |\mathbf{M}|$
 - ▶ associe à chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{F}_n$ d'arité n , une fonction n -aire $f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}|^n \rightarrow |\mathbf{M}|$
- interprétation des termes de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$

$$[\]^{\mathbf{M}} : \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \rightarrow |\mathbf{M}|$$

Interprétation des termes de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$

- structure \mathbf{M} permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F}
 - ▶ domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$ (ensemble non vide)
 - ▶ associe à chaque constante $k \in \mathcal{F}_0$ un élément $k^{\mathbf{M}} \in |\mathbf{M}|$
 - ▶ associe à chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{F}_n$ d'arité n , une fonction n -aire $f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}|^n \rightarrow |\mathbf{M}|$
- interprétation des termes de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$

$$[\]^{\mathbf{M}} : \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \rightarrow |\mathbf{M}|$$

$$[t]^{\mathbf{M}} = \begin{cases} k^{\mathbf{M}} & \text{si } t = k \in \mathcal{F}_0 \end{cases}$$

Interprétation des termes de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$

- structure \mathbf{M} permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F}
 - ▶ domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$ (ensemble non vide)
 - ▶ associe à chaque constante $k \in \mathcal{F}_0$ un élément $k^{\mathbf{M}} \in |\mathbf{M}|$
 - ▶ associe à chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{F}_n$ d'arité n , une fonction n -aire $f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}|^n \rightarrow |\mathbf{M}|$
- interprétation des termes de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$

$$[\]^{\mathbf{M}} : \mathcal{T}_0(\mathcal{F}) \rightarrow |\mathbf{M}|$$

$$[t]^{\mathbf{M}} = \begin{cases} k^{\mathbf{M}} & \text{si } t = k \in \mathcal{F}_0 \\ f^{\mathbf{M}}([t_1]^{\mathbf{M}}, \dots, [t_n]^{\mathbf{M}}) & \text{si } t = f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

Interprétation des symboles de prédicat

- structure **M** permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F} et de \mathcal{P}

Interprétation des symboles de prédicat

- structure \mathbf{M} permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F} et de \mathcal{P}
 - ▶ $p \in \mathcal{P}_0$ est interprété par un booléen $p^{\mathbf{M}} \in \{0, 1\}$

Interprétation des symboles de prédicat

- structure \mathbf{M} permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F} et de \mathcal{P}
 - ▶ $p \in \mathcal{P}_0$ est interprété par un booléen $p^{\mathbf{M}} \in \{0, 1\}$
 - ▶ $p \in \mathcal{P}_n$ ($n > 0$) est interprété par une relation n -aire $p^{\mathbf{M}}$ sur le domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$: $p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^n$
 $p^{\mathbf{M}}$ est un ensemble de n -uplets de valeurs dans $|\mathbf{M}|$

Interprétation des symboles de prédicat

- structure \mathbf{M} permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F} et de \mathcal{P}

- ▶ $p \in \mathcal{P}_0$ est interprété par un booléen $p^{\mathbf{M}} \in \{0, 1\}$
- ▶ $p \in \mathcal{P}_n$ ($n > 0$) est interprété par une relation n -aire $p^{\mathbf{M}}$ sur le domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$: $p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^n$
 $p^{\mathbf{M}}$ est un ensemble de n -uplets de valeurs dans $|\mathbf{M}|$

exemple : interprétation du prédicat $inf \in \mathcal{P}_2$ sur le domaine $|\mathbf{M}| = \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} inf^{\mathbf{M}} &= \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), \dots, (1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots\} \\ &= \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2 \mid n_1 \leq n_2\} \subseteq \mathbb{N}^2 \end{aligned}$$

Interprétation des symboles de prédicat

- structure \mathbf{M} permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F} et de \mathcal{P}
 - ▶ $p \in \mathcal{P}_0$ est interprété par un booléen $p^{\mathbf{M}} \in \{0, 1\}$
 - ▶ $p \in \mathcal{P}_n$ ($n > 0$) est interprété par une relation n -aire $p^{\mathbf{M}}$ sur le domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$: $p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^n$
 $p^{\mathbf{M}}$ est un ensemble de n -uplets de valeurs dans $|\mathbf{M}|$

exemple : interprétation du prédicat $inf \in \mathcal{P}_2$ sur le domaine $|\mathbf{M}| = \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} inf^{\mathbf{M}} &= \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), \dots, (1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots\} \\ &= \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2 \mid n_1 \leq n_2\} \subseteq \mathbb{N}^2 \end{aligned}$$

- associer un booléen à une formule atomique $p(t_1, \dots, t_n)$

Interprétation des symboles de prédicat

- structure \mathbf{M} permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F} et de \mathcal{P}
 - ▶ $p \in \mathcal{P}_0$ est interprété par un booléen $p^{\mathbf{M}} \in \{0, 1\}$
 - ▶ $p \in \mathcal{P}_n$ ($n > 0$) est interprété par une relation n -aire $p^{\mathbf{M}}$ sur le domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$: $p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^n$
 $p^{\mathbf{M}}$ est un ensemble de n -uplets de valeurs dans $|\mathbf{M}|$

exemple : interprétation du prédicat $inf \in \mathcal{P}_2$ sur le domaine $|\mathbf{M}| = \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} inf^{\mathbf{M}} &= \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), \dots, (1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots\} \\ &= \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2 \mid n_1 \leq n_2\} \subseteq \mathbb{N}^2 \end{aligned}$$

- associer un booléen à une formule atomique $p(t_1, \dots, t_n)$
 - ▶ calcul des valeurs $[t_1]^{\mathbf{M}}, \dots, [t_n]^{\mathbf{M}}$ appartenant au domaine $|\mathbf{M}|$

Interprétation des symboles de prédicat

- structure \mathbf{M} permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F} et de \mathcal{P}

- ▶ $p \in \mathcal{P}_0$ est interprété par un booléen $p^{\mathbf{M}} \in \{0, 1\}$
- ▶ $p \in \mathcal{P}_n$ ($n > 0$) est interprété par une relation n -aire $p^{\mathbf{M}}$ sur le domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$: $p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^n$
 $p^{\mathbf{M}}$ est un ensemble de n -uplets de valeurs dans $|\mathbf{M}|$

exemple : interprétation du prédicat $inf \in \mathcal{P}_2$ sur le domaine $|\mathbf{M}| = \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} inf^{\mathbf{M}} &= \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), \dots, (1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots\} \\ &= \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2 \mid n_1 \leq n_2\} \subseteq \mathbb{N}^2 \end{aligned}$$

- associer un booléen à une formule atomique $p(t_1, \dots, t_n)$

- ▶ calcul des valeurs $[t_1]^{\mathbf{M}}, \dots, [t_n]^{\mathbf{M}}$ appartenant au domaine $|\mathbf{M}|$
- ▶ déterminer si le n -uplet $([t_1]^{\mathbf{M}}, \dots, [t_n]^{\mathbf{M}})$ appartient à l'ensemble $p^{\mathbf{M}}$

Interprétation des symboles de prédicat

- structure \mathbf{M} permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F} et de \mathcal{P}
 - ▶ $p \in \mathcal{P}_0$ est interprété par un booléen $p^{\mathbf{M}} \in \{0, 1\}$
 - ▶ $p \in \mathcal{P}_n$ ($n > 0$) est interprété par une relation n -aire $p^{\mathbf{M}}$ sur le domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$: $p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^n$
 $p^{\mathbf{M}}$ est un ensemble de n -uplets de valeurs dans $|\mathbf{M}|$

exemple : interprétation du prédicat $inf \in \mathcal{P}_2$ sur le domaine $|\mathbf{M}| = \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} inf^{\mathbf{M}} &= \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), \dots, (1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots\} \\ &= \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2 \mid n_1 \leq n_2\} \subseteq \mathbb{N}^2 \end{aligned}$$

- associer un booléen à une formule atomique $p(t_1, \dots, t_n)$
 - ▶ calcul des valeurs $[t_1]^{\mathbf{M}}, \dots, [t_n]^{\mathbf{M}}$ appartenant au domaine $|\mathbf{M}|$
 - ▶ déterminer si le n -uplet $([t_1]^{\mathbf{M}}, \dots, [t_n]^{\mathbf{M}})$ appartient à l'ensemble $p^{\mathbf{M}}$

$$[inf(Z, S(S(Z)))]^{\mathbf{M}} = 1 \text{ car } ([Z]^{\mathbf{M}}, [S(S(Z))]^{\mathbf{M}}) = (0, 2) \in inf^{\mathbf{M}}$$

Interprétation des symboles de prédicat

- structure \mathbf{M} permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F} et de \mathcal{P}

- ▶ $p \in \mathcal{P}_0$ est interprété par un booléen $p^{\mathbf{M}} \in \{0, 1\}$
- ▶ $p \in \mathcal{P}_n$ ($n > 0$) est interprété par une relation n -aire $p^{\mathbf{M}}$ sur le domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$: $p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^n$
 $p^{\mathbf{M}}$ est un ensemble de n -uplets de valeurs dans $|\mathbf{M}|$

exemple : interprétation du prédicat $inf \in \mathcal{P}_2$ sur le domaine $|\mathbf{M}| = \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} inf^{\mathbf{M}} &= \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), \dots, (1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots\} \\ &= \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2 \mid n_1 \leq n_2\} \subseteq \mathbb{N}^2 \end{aligned}$$

- associer un booléen à une formule atomique $p(t_1, \dots, t_n)$

- ▶ calcul des valeurs $[t_1]^{\mathbf{M}}, \dots, [t_n]^{\mathbf{M}}$ appartenant au domaine $|\mathbf{M}|$
- ▶ déterminer si le n -uplet $([t_1]^{\mathbf{M}}, \dots, [t_n]^{\mathbf{M}})$ appartient à l'ensemble $p^{\mathbf{M}}$

$$[inf(Z, S(S(Z)))]^{\mathbf{M}} = 1 \text{ car } ([Z]^{\mathbf{M}}, [S(S(Z))]^{\mathbf{M}}) = (0, 2) \in inf^{\mathbf{M}}$$

$$[inf(S(S(Z)), Z)]^{\mathbf{M}} = 0 \text{ car } ([S(S(Z))]^{\mathbf{M}}, [Z]^{\mathbf{M}}) = (2, 0) \notin inf^{\mathbf{M}}$$

Interprétation des formules atomiques

- structure \mathbf{M} permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F} et de \mathcal{P}
 - ▶ domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$
 - ▶ chaque constante $k \in \mathcal{F}_0$ est interprétée par un élément $k^{\mathbf{M}} \in |\mathbf{M}|$
 - ▶ chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{F}_n$ d'arité n est interprété par une fonction n -aire $f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}|^n \rightarrow |\mathbf{M}|$
 - ▶ chaque symbole $p \in \mathcal{P}_0$ est interprété par un booléen $p^{\mathbf{M}} \in \{0, 1\}$
 - ▶ chaque symbole de prédicat $p \in \mathcal{P}_n$ d'arité n est interprété par un ensemble de n -uplets $p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^n$

Interprétation des formules atomiques

- structure \mathbf{M} permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F} et de \mathcal{P}
 - ▶ domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$
 - ▶ chaque constante $k \in \mathcal{F}_0$ est interprétée par un élément $k^{\mathbf{M}} \in |\mathbf{M}|$
 - ▶ chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{F}_n$ d'arité n est interprété par une fonction n -aire $f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}|^n \rightarrow |\mathbf{M}|$
 - ▶ chaque symbole $p \in \mathcal{P}_0$ est interprété par un booléen $p^{\mathbf{M}} \in \{0, 1\}$
 - ▶ chaque symbole de prédicat $p \in \mathcal{P}_n$ d'arité n est interprété par un ensemble de n -uplets $p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^n$
- interprétation des formules atomiques $\mathbf{I}_{\mathbf{M}} : \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{B}$

Interprétation des formules atomiques

- structure \mathbf{M} permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F} et de \mathcal{P}
 - ▶ domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$
 - ▶ chaque constante $k \in \mathcal{F}_0$ est interprétée par un élément $k^{\mathbf{M}} \in |\mathbf{M}|$
 - ▶ chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{F}_n$ d'arité n est interprété par une fonction n -aire $f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}|^n \rightarrow |\mathbf{M}|$
 - ▶ chaque symbole $p \in \mathcal{P}_0$ est interprété par un booléen $p^{\mathbf{M}} \in \{0, 1\}$
 - ▶ chaque symbole de prédicat $p \in \mathcal{P}_n$ d'arité n est interprété par un ensemble de n -uplets $p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^n$
- interprétation des formules atomiques $\mathbf{I}_{\mathbf{M}} : \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{B}$

$$p \in \mathcal{P}_0 \quad \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(p) = p^{\mathbf{M}}$$

Interprétation des formules atomiques

- structure \mathbf{M} permettant d'interpréter les symboles de \mathcal{F} et de \mathcal{P}
 - ▶ domaine d'interprétation $|\mathbf{M}|$
 - ▶ chaque constante $k \in \mathcal{F}_0$ est interprétée par un élément $k^{\mathbf{M}} \in |\mathbf{M}|$
 - ▶ chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{F}_n$ d'arité n est interprété par une fonction n -aire $f^{\mathbf{M}} : |\mathbf{M}|^n \rightarrow |\mathbf{M}|$
 - ▶ chaque symbole $p \in \mathcal{P}_0$ est interprété par un booléen $p^{\mathbf{M}} \in \{0, 1\}$
 - ▶ chaque symbole de prédicat $p \in \mathcal{P}_n$ d'arité n est interprété par un ensemble de n -uplets $p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}|^n$
- interprétation des formules atomiques $\mathbf{I}_{\mathbf{M}} : \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{B}$

$$p \in \mathcal{P}_0 \quad \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(p) = p^{\mathbf{M}}$$

$$p \in \mathcal{P}_n \quad \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(p(t_1, \dots, t_n)) = \begin{cases} 1 & \text{si } ([t_1]^{\mathbf{M}}, \dots, [t_n]^{\mathbf{M}}) \in p^{\mathbf{M}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$(n > 0)$

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer un booléen à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer un booléen à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

- 1 associer un **booléen** (une valeur de \mathbb{B}) à chaque formule atomique apparaissant dans F

... et associer le booléen $\mathbf{I}_M(\text{false}) = 0$ à la formule **false** et le booléen $\mathbf{I}_M(\text{true}) = 1$ à la formule **true**

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer un booléen à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

- 1 associer un **booléen** (une valeur de \mathbb{B}) à chaque formule atomique apparaissant dans F
... et associer le booléen $\mathbf{l}_M(\text{false}) = 0$ à la formule **false** et le booléen $\mathbf{l}_M(\text{true}) = 1$ à la formule **true**
- 2 associer une **expression booléenne**, notée $[F]^M$, à la formule F

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer un booléen à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

- 1 associer un **booléen** (une valeur de \mathbb{B}) à chaque formule atomique apparaissant dans F
... et associer le booléen $\mathbf{l}_M(\text{false}) = 0$ à la formule **false** et le booléen $\mathbf{l}_M(\text{true}) = 1$ à la formule **true**
- 2 associer une **expression booléenne**, notée $[F]^M$, à la formule F
- 3 **évaluer** l'expression booléenne $[F]^M$ (déterminer un booléen)

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer un booléen à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

2 associer une **expression booléenne**, notée $[F]^M$, à la formule F

▶ **expressions booléennes**

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer un booléen à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

2 associer une **expression booléenne**, notée $[F]^M$, à la formule F

▶ **expressions booléennes**

★ les booléens 0 et 1 sont des expressions booléennes

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer un booléen à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

2 associer une **expression booléenne**, notée $[F]^M$, à la formule F

► **expressions booléennes**

- ★ les booléens 0 et 1 sont des expressions booléennes
- ★ si e est une expression booléenne, alors \bar{e} est une expression booléenne

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer un booléen à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

2 associer une **expression booléenne**, notée $[F]^M$, à la formule F

► expressions booléennes

- ★ les booléens 0 et 1 sont des expressions booléennes
- ★ si e est une expression booléenne, alors \bar{e} est une expression booléenne
- ★ si e_1 et e_2 sont des expressions booléennes, alors $e_1 + e_2$ et $e_1 \cdot e_2$ sont des expressions booléennes

$\bar{}$, $+$ et \cdot sont des opérateurs booléens : ils ne s'appliquent que sur des expressions booléennes (ils ne s'appliquent pas sur des formules logiques)

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer un booléen à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

2 associer une **expression booléenne**, notée $[F]^M$, à la formule F

▶ **expressions booléennes**

- ★ les booléens 0 et 1 sont des expressions booléennes
- ★ si e est une expression booléenne, alors \bar{e} est une expression booléenne
- ★ si e_1 et e_2 sont des expressions booléennes, alors $e_1 + e_2$ et $e_1 \cdot e_2$ sont des expressions booléennes

▶ **définition inductive de $[F]^M$**

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer un booléen à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

2 associer une **expression booléenne**, notée $[F]^M$, à la formule F

▶ **expressions booléennes**

- ★ les booléens 0 et 1 sont des expressions booléennes
- ★ si e est une expression booléenne, alors \bar{e} est une expression booléenne
- ★ si e_1 et e_2 sont des expressions booléennes, alors $e_1 + e_2$ et $e_1 \cdot e_2$ sont des expressions booléennes

▶ **définition inductive de $[F]^M$**

$$[\text{true}]^M = \mathbf{I}_M(\text{true}) = 1 \quad [\text{false}]^M = \mathbf{I}_M(\text{false}) = 0$$

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer un booléen à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

2 associer une **expression booléenne**, notée $[F]^M$, à la formule F

▶ **expressions booléennes**

- ★ les booléens 0 et 1 sont des expressions booléennes
- ★ si e est une expression booléenne, alors \bar{e} est une expression booléenne
- ★ si e_1 et e_2 sont des expressions booléennes, alors $e_1 + e_2$ et $e_1 \cdot e_2$ sont des expressions booléennes

▶ **définition inductive de $[F]^M$**

$$[\text{true}]^M = \mathbf{I}_M(\text{true}) = 1 \quad [\text{false}]^M = \mathbf{I}_M(\text{false}) = 0$$

$$[F]^M = \mathbf{I}_M(F) \quad \text{si } F \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$$

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer un booléen à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

2 associer une **expression booléenne**, notée $[F]^M$, à la formule F

▶ **expressions booléennes**

- ★ les booléens 0 et 1 sont des expressions booléennes
- ★ si e est une expression booléenne, alors \bar{e} est une expression booléenne
- ★ si e_1 et e_2 sont des expressions booléennes, alors $e_1 + e_2$ et $e_1 \cdot e_2$ sont des expressions booléennes

▶ **définition inductive de $[F]^M$**

$$[\text{true}]^M = \mathbf{I}_M(\text{true}) = 1 \quad [\text{false}]^M = \mathbf{I}_M(\text{false}) = 0$$

$$[F]^M = \mathbf{I}_M(F) \quad \text{si } F \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$$

$$[\neg F_0]^M = \overline{[F_0]^M}$$

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer un booléen à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

2 associer une **expression booléenne**, notée $[F]^M$, à la formule F

▶ **expressions booléennes**

- ★ les booléens 0 et 1 sont des expressions booléennes
- ★ si e est une expression booléenne, alors \bar{e} est une expression booléenne
- ★ si e_1 et e_2 sont des expressions booléennes, alors $e_1 + e_2$ et $e_1 \cdot e_2$ sont des expressions booléennes

▶ **définition inductive de $[F]^M$**

$$[\text{true}]^M = \mathbf{I}_M(\text{true}) = 1 \quad [\text{false}]^M = \mathbf{I}_M(\text{false}) = 0$$

$$[F]^M = \mathbf{I}_M(F) \quad \text{si } F \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$$

$$[\neg F_0]^M = \overline{[F_0]^M}$$

$$[F_1 \wedge F_2]^M = [F_1]^M \cdot [F_2]^M$$

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer un booléen à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

② associer une **expression booléenne**, notée $[F]^M$, à la formule F

▶ **expressions booléennes**

- ★ les booléens 0 et 1 sont des expressions booléennes
- ★ si e est une expression booléenne, alors \bar{e} est une expression booléenne
- ★ si e_1 et e_2 sont des expressions booléennes, alors $e_1 + e_2$ et $e_1 \cdot e_2$ sont des expressions booléennes

▶ **définition inductive de $[F]^M$**

$$[\text{true}]^M = \mathbf{I}_M(\text{true}) = 1 \quad [\text{false}]^M = \mathbf{I}_M(\text{false}) = 0$$

$$[F]^M = \mathbf{I}_M(F) \quad \text{si } F \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$$

$$[\neg F_0]^M = \overline{[F_0]^M}$$

$$[F_1 \wedge F_2]^M = [F_1]^M \cdot [F_2]^M$$

$$[F_1 \vee F_2]^M = [F_1]^M + [F_2]^M$$

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer un booléen à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

2 associer une **expression booléenne**, notée $[F]^M$, à la formule F

► **expressions booléennes**

- ★ les booléens 0 et 1 sont des expressions booléennes
- ★ si e est une expression booléenne, alors \bar{e} est une expression booléenne
- ★ si e_1 et e_2 sont des expressions booléennes, alors $e_1 + e_2$ et $e_1 \cdot e_2$ sont des expressions booléennes

► **définition inductive de $[F]^M$**

$$[\text{true}]^M = \mathbf{I}_M(\text{true}) = 1 \quad [\text{false}]^M = \mathbf{I}_M(\text{false}) = 0$$

$$[F]^M = \mathbf{I}_M(F) \quad \text{si } F \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$$

$$[\neg F_0]^M = \overline{[F_0]^M}$$

$$[F_1 \wedge F_2]^M = [F_1]^M \cdot [F_2]^M$$

$$[F_1 \vee F_2]^M = [F_1]^M + [F_2]^M$$

$$[F_1 \Rightarrow F_2]^M = \overline{[F_1]^M} + [F_2]^M$$

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer un booléen à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

2 associer une **expression booléenne**, notée $[F]^M$, à la formule F

▶ *exemple* : $[\text{inf}(S(S(Z)), Z) \vee \text{true}]^M$

▶ **définition inductive de $[F]^M$**

$$[\text{true}]^M = \mathbf{I}_M(\text{true}) = 1 \quad [\text{false}]^M = \mathbf{I}_M(\text{false}) = 0$$

$$[F]^M = \mathbf{I}_M(F) \quad \text{si } F \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$$

$$[\neg F_0]^M = \overline{[F_0]^M}$$

$$[F_1 \wedge F_2]^M = [F_1]^M \cdot [F_2]^M$$

$$[F_1 \vee F_2]^M = [F_1]^M + [F_2]^M$$

$$[F_1 \Rightarrow F_2]^M = \overline{[F_1]^M} + [F_2]^M$$

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer un booléen à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

② associer une **expression booléenne**, notée $[F]^M$, à la formule F

▶ *exemple* : $[inf(S(S(Z)), Z) \vee true]^M$

$$= [inf(S(S(Z)), Z)]^M + [true]^M$$

▶ **définition inductive de $[F]^M$**

$$[true]^M = \mathbf{I}_M(true) = 1 \quad [false]^M = \mathbf{I}_M(false) = 0$$

$$[F]^M = \mathbf{I}_M(F) \text{ si } F \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$$

$$[\neg F_0]^M = \overline{[F_0]^M}$$

$$[F_1 \wedge F_2]^M = [F_1]^M \cdot [F_2]^M$$

$$[F_1 \vee F_2]^M = [F_1]^M + [F_2]^M$$

$$[F_1 \Rightarrow F_2]^M = \overline{[F_1]^M} + [F_2]^M$$

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer un booléen à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

2 associer une **expression booléenne**, notée $[F]^M$, à la formule F

▶ *exemple* : $[inf(S(S(Z)), Z) \vee true]^M$

$$\begin{aligned} &= [inf(S(S(Z)), Z)]^M + [true]^M \\ &= 0 + 1 \quad \text{si } \mathbf{I}_M(inf(S(S(Z)), Z)) = 0 \end{aligned}$$

▶ **définition inductive de $[F]^M$**

$$[true]^M = \mathbf{I}_M(true) = 1 \quad [false]^M = \mathbf{I}_M(false) = 0$$

$$[F]^M = \mathbf{I}_M(F) \quad \text{si } F \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$$

$$[\neg F_0]^M = \overline{[F_0]^M}$$

$$[F_1 \wedge F_2]^M = [F_1]^M \cdot [F_2]^M$$

$$[F_1 \vee F_2]^M = [F_1]^M + [F_2]^M$$

$$[F_1 \Rightarrow F_2]^M = \overline{[F_1]^M} + [F_2]^M$$

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer un booléen à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

2 associer une **expression booléenne**, notée $[F]^M$, à la formule F

▶ *exemple* : $[(\neg F_1 \wedge F_2) \Rightarrow (F_3 \vee F_1)]^M$

▶ **définition inductive de $[F]^M$**

$$[\text{true}]^M = \mathbf{I}_M(\text{true}) = 1 \quad [\text{false}]^M = \mathbf{I}_M(\text{false}) = 0$$

$$[F]^M = \mathbf{I}_M(F) \quad \text{si } F \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$$

$$[\neg F_0]^M = \overline{[F_0]^M}$$

$$[F_1 \wedge F_2]^M = [F_1]^M \cdot [F_2]^M$$

$$[F_1 \vee F_2]^M = [F_1]^M + [F_2]^M$$

$$[F_1 \Rightarrow F_2]^M = \overline{[F_1]^M} + [F_2]^M$$

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer un booléen à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

② associer une **expression booléenne**, notée $[F]^M$, à la formule F

▶ *exemple* : $[(\neg F_1 \wedge F_2) \Rightarrow (F_3 \vee F_1)]^M$

$$= \overline{[\neg F_1 \wedge F_2]^M} + [F_3 \vee F_1]^M$$

▶ **définition inductive de $[F]^M$**

$$[\text{true}]^M = \mathbf{I}_M(\text{true}) = 1 \quad [\text{false}]^M = \mathbf{I}_M(\text{false}) = 0$$

$$[F]^M = \mathbf{I}_M(F) \quad \text{si } F \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$$

$$[\neg F_0]^M = \overline{[F_0]^M}$$

$$[F_1 \wedge F_2]^M = [F_1]^M \cdot [F_2]^M$$

$$[F_1 \vee F_2]^M = [F_1]^M + [F_2]^M$$

$$[F_1 \Rightarrow F_2]^M = \overline{[F_1]^M} + [F_2]^M$$

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer un booléen à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

② associer une **expression booléenne**, notée $[F]^M$, à la formule F

▶ *exemple* : $[(\neg F_1 \wedge F_2) \Rightarrow (F_3 \vee F_1)]^M$

$$= \overline{[\neg F_1 \wedge F_2]^M} + [F_3 \vee F_1]^M = \overline{[\neg F_1]^M \cdot [F_2]^M} + ([F_3]^M + [F_1]^M)$$

▶ **définition inductive de $[F]^M$**

$$[\text{true}]^M = \mathbf{I}_M(\text{true}) = 1 \quad [\text{false}]^M = \mathbf{I}_M(\text{false}) = 0$$

$$[F]^M = \mathbf{I}_M(F) \quad \text{si } F \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$$

$$[\neg F_0]^M = \overline{[F_0]^M}$$

$$[F_1 \wedge F_2]^M = [F_1]^M \cdot [F_2]^M$$

$$[F_1 \vee F_2]^M = [F_1]^M + [F_2]^M$$

$$[F_1 \Rightarrow F_2]^M = \overline{[F_1]^M} + [F_2]^M$$

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer un booléen à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

② associer une **expression booléenne**, notée $[F]^M$, à la formule F

▶ *exemple* : $[(\neg F_1 \wedge F_2) \Rightarrow (F_3 \vee F_1)]^M$

$$\begin{aligned}
 &= \overline{[\neg F_1 \wedge F_2]^M} + [F_3 \vee F_1]^M = \overline{[\neg F_1]^M \cdot [F_2]^M} + ([F_3]^M + [F_1]^M) \\
 &= \overline{[F_1]^M \cdot [F_2]^M} + ([F_3]^M + [F_1]^M)
 \end{aligned}$$

▶ **définition inductive de $[F]^M$**

$$[\text{true}]^M = \mathbf{I}_M(\text{true}) = 1 \quad [\text{false}]^M = \mathbf{I}_M(\text{false}) = 0$$

$$[F]^M = \mathbf{I}_M(F) \quad \text{si } F \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$$

$$[\neg F_0]^M = \overline{[F_0]^M}$$

$$[F_1 \wedge F_2]^M = [F_1]^M \cdot [F_2]^M$$

$$[F_1 \vee F_2]^M = [F_1]^M + [F_2]^M$$

$$[F_1 \Rightarrow F_2]^M = \overline{[F_1]^M} + [F_2]^M$$

Sémantique : interprétation des formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

associer un booléen à une formule $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

② associer une **expression booléenne**, notée $[F]^M$, à la formule F

▶ *exemple* : $[(\neg F_1 \wedge F_2) \Rightarrow (F_3 \vee F_1)]^M$

$$= \overline{[\neg F_1 \wedge F_2]^M} + [F_3 \vee F_1]^M = \overline{[\neg F_1]^M \cdot [F_2]^M} + ([F_3]^M + [F_1]^M)$$

$$= \overline{[F_1]^M \cdot [F_2]^M} + ([F_3]^M + [F_1]^M) = \overline{\mathbf{I}_M(F_1) \cdot \mathbf{I}_M(F_2)} + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1))$$

▶ **définition inductive de $[F]^M$**

$$[\text{true}]^M = \mathbf{I}_M(\text{true}) = 1 \quad [\text{false}]^M = \mathbf{I}_M(\text{false}) = 0$$

$$[F]^M = \mathbf{I}_M(F) \quad \text{si } F \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$$

$$[\neg F_0]^M = \overline{[F_0]^M}$$

$$[F_1 \wedge F_2]^M = [F_1]^M \cdot [F_2]^M$$

$$[F_1 \vee F_2]^M = [F_1]^M + [F_2]^M$$

$$[F_1 \Rightarrow F_2]^M = \overline{[F_1]^M} + [F_2]^M$$

Evaluation d'une expression booléenne

deux approches :

Evaluation d'une expression booléenne

deux approches :

- 1 approche algébrique : on ne définit pas les opérateurs booléens mais on spécifie les **propriétés** que ces opérateurs vérifient
 - ▶ **raisonnement** équationnel
 - ★ pour « simplifier » une expression booléenne
 - ★ pour déterminer le résultat de l'évaluation d'une expression booléenne

Evaluation d'une expression booléenne

deux approches :

- 1 approche algébrique : on ne définit pas les opérateurs booléens mais on spécifie les **propriétés** que ces opérateurs vérifient
 - ▶ **raisonnement** équationnel
 - ★ pour « simplifier » une expression booléenne
 - ★ pour déterminer le résultat de l'évaluation d'une expression booléenne
- 2 **définition** des opérateurs booléens
 - ▶ application des opérateurs pour **calculer** le résultat de l'évaluation d'une expression booléenne

Approche algébrique

- spécification des propriétés des opérateurs booléens à partir d'une relation \equiv entre expressions booléennes

Approche algébrique

- spécification des propriétés des opérateurs booléens à partir d'une relation \equiv entre expressions booléennes
 - ▶ $e_1 \equiv e_2$ ssi les évaluations de e_1 et e_2 produisent les mêmes booléens

Approche algébrique

- spécification des propriétés des opérateurs booléens à partir d'une relation \equiv entre expressions booléennes
 - ▶ $e_1 \equiv e_2$ ssi les évaluations de e_1 et e_2 produisent les mêmes booléens
 - ★ le résultat de l'évaluation de e_1 est le booléen b_1
 - ★ le résultat de l'évaluation de e_2 est le booléen b_2
 - ★ les booléens b_1 et b_2 sont syntaxiquement égaux ($b_1 = b_2$)

Approche algébrique

- spécification des propriétés des opérateurs booléens à partir d'une relation \equiv entre expressions booléennes
 - ▶ $e_1 \equiv e_2$ ssi les évaluations de e_1 et e_2 produisent les mêmes booléens
 - ▶ \equiv est une relation d'équivalence sur les expressions booléennes

Approche algébrique

- spécification des propriétés des opérateurs booléens à partir d'une relation \equiv entre expressions booléennes
 - ▶ $e_1 \equiv e_2$ ssi les évaluations de e_1 et e_2 produisent les mêmes booléens
 - ▶ \equiv est une relation d'équivalence sur les expressions booléennes
 - ★ réflexive : $e \equiv e$

Approche algébrique

- spécification des propriétés des opérateurs booléens à partir d'une relation \equiv entre expressions booléennes
 - ▶ $e_1 \equiv e_2$ ssi les évaluations de e_1 et e_2 produisent les mêmes booléens
 - ▶ \equiv est une relation d'équivalence sur les expressions booléennes
 - ★ réflexive : $e \equiv e$
 - ★ symétrique : si $e_1 \equiv e_2$ alors $e_2 \equiv e_1$

Approche algébrique

- spécification des propriétés des opérateurs booléens à partir d'une relation \equiv entre expressions booléennes
 - ▶ $e_1 \equiv e_2$ ssi les évaluations de e_1 et e_2 produisent les mêmes booléens
 - ▶ \equiv est une relation d'équivalence sur les expressions booléennes
 - ★ réflexive : $e \equiv e$
 - ★ symétrique : si $e_1 \equiv e_2$ alors $e_2 \equiv e_1$
 - ★ transitive : si $e_1 \equiv e_2$ et $e_2 \equiv e_3$ alors $e_1 \equiv e_3$

Approche algébrique

- spécification des propriétés des opérateurs booléens à partir d'une relation \equiv entre expressions booléennes
 - ▶ $e_1 \equiv e_2$ ssi les évaluations de e_1 et e_2 produisent les mêmes booléens
 - ▶ \equiv est une relation d'équivalence sur les expressions booléennes
 - ▶ \equiv est une congruence pour les opérateurs booléens \neg , \cdot et $+$

Approche algébrique

- spécification des propriétés des opérateurs booléens à partir d'une relation \equiv entre expressions booléennes
 - ▶ $e_1 \equiv e_2$ ssi les évaluations de e_1 et e_2 produisent les mêmes booléens
 - ▶ \equiv est une relation d'équivalence sur les expressions booléennes
 - ▶ \equiv est une congruence pour les opérateurs booléens \neg , \cdot et $+$
 - ★ si $e_1 \equiv e_2$ alors $\overline{e_1} \equiv \overline{e_2}$

Approche algébrique

- spécification des propriétés des opérateurs booléens à partir d'une relation \equiv entre expressions booléennes
 - ▶ $e_1 \equiv e_2$ ssi les évaluations de e_1 et e_2 produisent les mêmes booléens
 - ▶ \equiv est une relation d'équivalence sur les expressions booléennes
 - ▶ \equiv est une congruence pour les opérateurs booléens \neg , \cdot et $+$
 - ★ si $e_1 \equiv e_2$ alors $\overline{e_1} \equiv \overline{e_2}$
 - ★ si $e_1 \equiv e'_1$ et $e_2 \equiv e'_2$ alors $e_1 \cdot e_2 \equiv e'_1 \cdot e'_2$ et $e_1 + e_2 \equiv e'_1 + e'_2$

Approche algébrique

- spécification des propriétés des opérateurs booléens à partir d'une relation \equiv entre expressions booléennes
 - ▶ $e_1 \equiv e_2$ ssi les évaluations de e_1 et e_2 produisent les mêmes booléens
 - ▶ \equiv est une relation d'équivalence sur les expressions booléennes
 - ▶ \equiv est une congruence pour les opérateurs booléens \neg , \cdot et $+$
 - ▶ on utilise souvent le symbole $=$ à la place du symbole \equiv : il s'agit dans ce cas d'une égalité « sémantique »

Approche algébrique

- spécification des propriétés des opérateurs booléens à partir d'une relation \equiv entre expressions booléennes
- algèbre de Boole minimale $(\mathbb{B}, \cdot, +, -)$
 - ▶ \mathbb{B} contient deux éléments distincts 0 et 1

distinction

$$0 \neq 1 \quad (E0)$$

Approche algébrique

- spécification des propriétés des opérateurs booléens à partir d'une relation \equiv entre expressions booléennes
- algèbre de Boole minimale $(\mathbb{B}, \cdot, +, -)$
 - ▶ \mathbb{B} contient deux éléments distincts 0 et 1
 - ▶ pour tous $a, b \in \mathbb{B}$, les opérateurs booléens vérifient les propriétés :

distinction	complément	
$0 \neq 1 \quad (E0)$	complément 0	$\bar{0} \equiv 1 \quad (E1.1)$
	involution	$\overline{\bar{a}} \equiv a \quad (E1.2)$

Approche algébrique

- spécification des propriétés des opérateurs booléens à partir d'une relation \equiv entre expressions booléennes
- algèbre de Boole minimale $(\mathbb{B}, \cdot, +, -)$
 - ▶ \mathbb{B} contient deux éléments distincts 0 et 1
 - ▶ pour tous $a, b \in \mathbb{B}$, les opérateurs booléens vérifient les propriétés :

distinction	complément	
$0 \neq 1$ (E0)	complément 0	$\bar{0} \equiv 1$ (E1.1)
	involution	$\overline{\bar{a}} \equiv a$ (E1.2)
	produit	somme
commutativité	$a \cdot b \equiv b \cdot a$ (E2.1)	$a + b \equiv b + a$ (E3.1)

Approche algébrique

- spécification des propriétés des opérateurs booléens à partir d'une relation \equiv entre expressions booléennes
- algèbre de Boole minimale ($\mathbb{B}, \cdot, +, -$)
 - ▶ \mathbb{B} contient deux éléments distincts 0 et 1
 - ▶ pour tous $a, b \in \mathbb{B}$, les opérateurs booléens vérifient les propriétés :

distinction	complément	
	complément 0	
$0 \neq 1$ (E0)	$\bar{0} \equiv 1$ (E1.1)	
	involution	$\overline{\bar{a}} \equiv a$ (E1.2)
	produit	somme
commutativité	$a \cdot b \equiv b \cdot a$ (E2.1)	$a + b \equiv b + a$ (E3.1)
élément neutre	$1 \cdot a \equiv a$ (E2.2)	$0 + a \equiv a$ (E3.2)

Approche algébrique

- spécification des propriétés des opérateurs booléens à partir d'une relation \equiv entre expressions booléennes
- algèbre de Boole minimale $(\mathbb{B}, \cdot, +, -)$
 - ▶ \mathbb{B} contient deux éléments distincts 0 et 1
 - ▶ pour tous $a, b \in \mathbb{B}$, les opérateurs booléens vérifient les propriétés :

distinction	complément	
	complément 0	
$0 \neq 1$ (E0)	$\bar{0} \equiv 1$ (E1.1)	
	involution	$\overline{\bar{a}} \equiv a$ (E1.2)
	produit	somme
commutativité	$a \cdot b \equiv b \cdot a$ (E2.1)	$a + b \equiv b + a$ (E3.1)
élément neutre	$1 \cdot a \equiv a$ (E2.2)	$0 + a \equiv a$ (E3.2)
élément absorbant	$0 \cdot a \equiv 0$ (E2.3)	$1 + a \equiv 1$ (E3.3)

Raisonnement équationnel

- raisonnement équationnel permettant d'établir que le résultat de l'évaluation de l'expression booléenne e est le booléen b

Raisonnement équationnel

- raisonnement équationnel permettant d'établir que le résultat de l'évaluation de l'expression booléenne e est le booléen b
 - ▶ en utilisant les propriétés de \equiv , montrer que $e \equiv b$

Raisonnement équationnel

- raisonnement équationnel permettant d'établir que le résultat de l'évaluation de l'expression booléenne e est le booléen b
 - ▶ en utilisant les propriétés de \equiv , montrer que $e \equiv b$
 - ▶ *exemple* : $\overline{1 \cdot 0} \equiv 1$

Raisonnement équationnel

- raisonnement équationnel permettant d'établir que le résultat de l'évaluation de l'expression booléenne e est le booléen b
 - ▶ en utilisant les propriétés de \equiv , montrer que $e \equiv b$
 - ▶ *exemple* : $\overline{1 \cdot 0} \equiv 1$
 - (1) $1 \cdot 0 \equiv 0$ d'après (E2.2)

Raisonnement équationnel

- raisonnement équationnel permettant d'établir que le résultat de l'évaluation de l'expression booléenne e est le booléen b
 - ▶ en utilisant les propriétés de \equiv , montrer que $e \equiv b$
 - ▶ *exemple* : $\overline{1 \cdot 0} \equiv 1$
 - (1) $1 \cdot 0 \equiv 0$ d'après (E2.2)
 - (2) $\overline{1 \cdot 0} \equiv \overline{0}$ d'après (1) car \equiv est une congruence pour $\overline{\quad}$

Raisonnement équationnel

- raisonnement équationnel permettant d'établir que le résultat de l'évaluation de l'expression booléenne e est le booléen b
 - ▶ en utilisant les propriétés de \equiv , montrer que $e \equiv b$
 - ▶ *exemple* : $\overline{1 \cdot 0} \equiv 1$
 - (1) $1 \cdot 0 \equiv 0$ d'après (E2.2)
 - (2) $\overline{1 \cdot 0} \equiv \overline{0}$ d'après (1) car \equiv est une congruence pour $\overline{\quad}$
 - (3) $\overline{0} \equiv 1$ d'après (E1.1)

Raisonnement équationnel

- raisonnement équationnel permettant d'établir que le résultat de l'évaluation de l'expression booléenne e est le booléen b
 - ▶ en utilisant les propriétés de \equiv , montrer que $e \equiv b$
 - ▶ *exemple* : $\overline{1 \cdot 0} \equiv 1$
 - (1) $1 \cdot 0 \equiv 0$ d'après (E2.2)
 - (2) $\overline{1 \cdot 0} \equiv \overline{0}$ d'après (1) car \equiv est une congruence pour $\overline{\quad}$
 - (3) $\overline{0} \equiv 1$ d'après (E1.1)
 - (4) $\overline{1 \cdot 0} \equiv 1$ d'après (2) et (3) car \equiv est transitive

Raisonnement équationnel

- raisonnement équationnel permettant d'établir que le résultat de l'évaluation de l'expression booléenne e est le booléen b
 - ▶ en utilisant les propriétés de \equiv , montrer que $e \equiv b$
 - ▶ *exemple* : $\overline{1 \cdot 0} \equiv 1$
 - (1) $1 \cdot 0 \equiv 0$ d'après (E2.2)
 - (2) $\overline{1 \cdot 0} \equiv \overline{0}$ d'après (1) car \equiv est une congruence pour $\overline{\quad}$
 - (3) $\overline{0} \equiv 1$ d'après (E1.1)
 - (4) $\overline{1 \cdot 0} \equiv 1$ d'après (2) et (3) car \equiv est transitive
- raisonnement équationnel permettant d'établir que $e_1 \equiv e_2$

Raisonnement équationnel

- raisonnement équationnel permettant d'établir que le résultat de l'évaluation de l'expression booléenne e est le booléen b
 - ▶ en utilisant les propriétés de \equiv , montrer que $e \equiv b$
 - ▶ *exemple* : $\overline{1 \cdot 0} \equiv 1$
 - (1) $1 \cdot 0 \equiv 0$ d'après (E2.2)
 - (2) $\overline{1 \cdot 0} \equiv \overline{0}$ d'après (1) car \equiv est une congruence pour $\overline{\quad}$
 - (3) $\overline{0} \equiv 1$ d'après (E1.1)
 - (4) $\overline{1 \cdot 0} \equiv 1$ d'après (2) et (3) car \equiv est transitive
- raisonnement équationnel permettant d'établir que $e_1 \equiv e_2$
 - ▶ *exemple* : pour tout $a \in \mathbb{B}$, $a + a = a$

Raisonnement équationnel

- raisonnement équationnel permettant d'établir que le résultat de l'évaluation de l'expression booléenne e est le booléen b
 - ▶ en utilisant les propriétés de \equiv , montrer que $e \equiv b$
 - ▶ *exemple* : $\overline{1 \cdot 0} \equiv 1$
 - (1) $1 \cdot 0 \equiv 0$ d'après (E2.2)
 - (2) $\overline{1 \cdot 0} \equiv \overline{0}$ d'après (1) car \equiv est une congruence pour $\overline{}$
 - (3) $\overline{0} \equiv 1$ d'après (E1.1)
 - (4) $\overline{1 \cdot 0} \equiv 1$ d'après (2) et (3) car \equiv est transitive
- raisonnement équationnel permettant d'établir que $e_1 \equiv e_2$
 - ▶ *exemple* : pour tout $a \in \mathbb{B}$, $a + a = a$
on raisonne par cas sur a :
 - ★ si $a = 0$, montrons $0 + 0 \equiv 0$
 - (1) $0 + 0 \equiv 0$ d'après (E3.2)

Raisonnement équationnel

- raisonnement équationnel permettant d'établir que le résultat de l'évaluation de l'expression booléenne e est le booléen b
 - ▶ en utilisant les propriétés de \equiv , montrer que $e \equiv b$
 - ▶ *exemple* : $\overline{1 \cdot 0} \equiv 1$
 - (1) $\overline{1 \cdot 0} \equiv 0$ d'après (E2.2)
 - (2) $\overline{1 \cdot 0} \equiv \overline{0}$ d'après (1) car \equiv est une congruence pour $\overline{}$
 - (3) $\overline{0} \equiv 1$ d'après (E1.1)
 - (4) $\overline{1 \cdot 0} \equiv 1$ d'après (2) et (3) car \equiv est transitive

- raisonnement équationnel permettant d'établir que $e_1 \equiv e_2$
 - ▶ *exemple* : pour tout $a \in \mathbb{B}$, $a + a = a$
on raisonne par cas sur a :
 - ★ si $a = 0$, montrons $0 + 0 \equiv 0$
 - (1) $0 + 0 \equiv 0$ d'après (E3.2)
 - ★ si $a = 1$, montrons $1 + 1 \equiv 1$
 - (1) $1 + 1 \equiv 1$ d'après (E3.3)

Expressions booléennes équivalentes

pour $a, b, c \in \mathbb{B}$:

associativité

$$(a \cdot b) \cdot c \equiv a \cdot (b \cdot c)$$

(E2.4)

$$(a + b) + c \equiv a + (b + c)$$

(E3.4)

Expressions booléennes équivalentes

pour $a, b, c \in \mathbb{B}$:

associativité

$$(a \cdot b) \cdot c \equiv a \cdot (b \cdot c) \quad (\text{E2.4}) \quad \Bigg| \quad (a + b) + c \equiv a + (b + c) \quad (\text{E3.4})$$

idempotence

$$a \cdot a \equiv a \quad (\text{E2.5}) \quad \Bigg| \quad a + a \equiv a \quad (\text{E3.5})$$

Expressions booléennes équivalentes

pour $a, b, c \in \mathbb{B}$:

associativité

$$(a \cdot b) \cdot c \equiv a \cdot (b \cdot c) \quad (\text{E2.4}) \quad | \quad (a + b) + c \equiv a + (b + c) \quad (\text{E3.4})$$

idempotence

$$a \cdot a \equiv a \quad (\text{E2.5}) \quad | \quad a + a \equiv a \quad (\text{E3.5})$$

élément neutre

$$a \cdot 1 \equiv a \quad (\text{E2.6}) \quad | \quad a + 0 \equiv a \quad (\text{E3.6})$$

Expressions booléennes équivalentes

pour $a, b, c \in \mathbb{B}$:

associativité

$$(a \cdot b) \cdot c \equiv a \cdot (b \cdot c) \quad (\text{E2.4}) \quad | \quad (a + b) + c \equiv a + (b + c) \quad (\text{E3.4})$$

idempotence

$$a \cdot a \equiv a \quad (\text{E2.5}) \quad | \quad a + a \equiv a \quad (\text{E3.5})$$

élément neutre

$$a \cdot 1 \equiv a \quad (\text{E2.6}) \quad | \quad a + 0 \equiv a \quad (\text{E3.6})$$

élément absorbant

$$a \cdot 0 \equiv 0 \quad (\text{E2.7}) \quad | \quad a + 1 \equiv 1 \quad (\text{E3.7})$$

Expressions booléennes équivalentes

pour $a, b, c \in \mathbb{B}$:

associativité

$$(a \cdot b) \cdot c \equiv a \cdot (b \cdot c) \quad (\text{E2.4}) \quad (a + b) + c \equiv a + (b + c) \quad (\text{E3.4})$$

idempotence

$$a \cdot a \equiv a \quad (\text{E2.5}) \quad a + a \equiv a \quad (\text{E3.5})$$

élément neutre

$$a \cdot 1 \equiv a \quad (\text{E2.6}) \quad a + 0 \equiv a \quad (\text{E3.6})$$

élément absorbant

$$a \cdot 0 \equiv 0 \quad (\text{E2.7}) \quad a + 1 \equiv 1 \quad (\text{E3.7})$$

distributivité

$$a \cdot (b + c) \equiv a \cdot b + a \cdot c \quad (\text{E4.1}) \quad a + (b \cdot c) \equiv (a + b) \cdot (a + c) \quad (\text{E4.2})$$

Expressions booléennes équivalentes

pour $a, b, c \in \mathbb{B}$:

associativité

$$(a \cdot b) \cdot c \equiv a \cdot (b \cdot c) \quad (\text{E2.4}) \quad (a + b) + c \equiv a + (b + c) \quad (\text{E3.4})$$

idempotence

$$a \cdot a \equiv a \quad (\text{E2.5}) \quad a + a \equiv a \quad (\text{E3.5})$$

élément neutre

$$a \cdot 1 \equiv a \quad (\text{E2.6}) \quad a + 0 \equiv a \quad (\text{E3.6})$$

élément absorbant

$$a \cdot 0 \equiv 0 \quad (\text{E2.7}) \quad a + 1 \equiv 1 \quad (\text{E3.7})$$

distributivité

$$a \cdot (b + c) \equiv a \cdot b + a \cdot c \quad (\text{E4.1}) \quad a + (b \cdot c) \equiv (a + b) \cdot (a + c) \quad (\text{E4.2})$$

complément

$$a \cdot \bar{a} \equiv 0 \quad (\text{E1.3}) \quad a + \bar{a} \equiv 1 \quad (\text{E1.4})$$

Expressions booléennes équivalentes

pour $a, b, c \in \mathbb{B}$:

associativité

$$(a \cdot b) \cdot c \equiv a \cdot (b \cdot c) \quad (\text{E2.4}) \quad (a + b) + c \equiv a + (b + c) \quad (\text{E3.4})$$

idempotence

$$a \cdot a \equiv a \quad (\text{E2.5}) \quad a + a \equiv a \quad (\text{E3.5})$$

élément neutre

$$a \cdot 1 \equiv a \quad (\text{E2.6}) \quad a + 0 \equiv a \quad (\text{E3.6})$$

élément absorbant

$$a \cdot 0 \equiv 0 \quad (\text{E2.7}) \quad a + 1 \equiv 1 \quad (\text{E3.7})$$

distributivité

$$a \cdot (b + c) \equiv a \cdot b + a \cdot c \quad (\text{E4.1}) \quad a + (b \cdot c) \equiv (a + b) \cdot (a + c) \quad (\text{E4.2})$$

complément

$$a \cdot \bar{a} \equiv 0 \quad (\text{E1.3}) \quad a + \bar{a} \equiv 1 \quad (\text{E1.4})$$

lois de Morgan

$$\overline{a \cdot b} \equiv \bar{a} + \bar{b} \quad (\text{E4.3}) \quad \overline{a + b} \equiv \bar{a} \cdot \bar{b} \quad (\text{E4.4})$$

Expressions booléennes équivalentes

pour $a, b, c \in \mathbb{B}$:

associativité

$$(a \cdot b) \cdot c \equiv a \cdot (b \cdot c) \quad (\text{E2.4}) \quad (a + b) + c \equiv a + (b + c) \quad (\text{E3.4})$$

idempotence

$$a \cdot a \equiv a \quad (\text{E2.5}) \quad a + a \equiv a \quad (\text{E3.5})$$

élément neutre

$$a \cdot 1 \equiv a \quad (\text{E2.6}) \quad a + 0 \equiv a \quad (\text{E3.6})$$

élément absorbant

$$a \cdot 0 \equiv 0 \quad (\text{E2.7}) \quad a + 1 \equiv 1 \quad (\text{E3.7})$$

distributivité

$$a \cdot (b + c) \equiv a \cdot b + a \cdot c \quad (\text{E4.1}) \quad a + (b \cdot c) \equiv (a + b) \cdot (a + c) \quad (\text{E4.2})$$

complément

$$a \cdot \bar{a} \equiv 0 \quad (\text{E1.3}) \quad a + \bar{a} \equiv 1 \quad (\text{E1.4})$$

lois de Morgan

$$\overline{a \cdot b} \equiv \bar{a} + \bar{b} \quad (\text{E4.3}) \quad \overline{a + b} \equiv \bar{a} \cdot \bar{b} \quad (\text{E4.4})$$

EXERCICE : montrer ces équivalences

Simplification de $[F]^M$: exemple

$$[(\neg F_1 \wedge F_2) \Rightarrow (F_3 \vee F_1)]^M = \overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1))$$

Simplification de $[F]^M$: exemple

$$[(\neg F_1 \wedge F_2) \Rightarrow (F_3 \vee F_1)]^M = \overline{\overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2)} + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1))$$

$$\overline{\overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2)} + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1))$$

Simplification de $[F]^M$: exemple

$$[(\neg F_1 \wedge F_2) \Rightarrow (F_3 \vee F_1)]^M = \overline{\overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2)} + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1))$$

$$\begin{aligned} & \overline{\overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2)} + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) \\ \equiv & \left(\overline{\overline{\mathbf{I}_M(F_1)} + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)}} \right) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) \quad (\text{E4.3}) \end{aligned}$$

Simplification de $[F]^M$: exemple

$$[(\neg F_1 \wedge F_2) \Rightarrow (F_3 \vee F_1)]^M = \overline{\overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2)} + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1))$$

$$\begin{aligned} & \overline{\overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2)} + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) \\ \equiv & \left(\overline{\overline{\mathbf{I}_M(F_1)} + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)}} \right) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) \quad (\text{E4.3}) \\ \equiv & \left(\mathbf{I}_M(F_1) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)} \right) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) \quad (\text{E1.2}) \end{aligned}$$

Simplification de $[F]^M$: exemple

$$[(\neg F_1 \wedge F_2) \Rightarrow (F_3 \vee F_1)]^M = \overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1))$$

$$\begin{aligned} & \overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) \\ \equiv & \overline{(\overline{\mathbf{I}_M(F_1)} + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)})} + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) \quad (\text{E4.3}) \\ \equiv & (\mathbf{I}_M(F_1) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)}) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) \quad (\text{E1.2}) \\ \equiv & (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) + (\mathbf{I}_M(F_1) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)}) \quad (\text{E3.1}) \end{aligned}$$

Simplification de $[F]^M$: exemple

$$[(\neg F_1 \wedge F_2) \Rightarrow (F_3 \vee F_1)]^M = \overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1))$$

$$\begin{aligned} & \overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) \\ \equiv & \left(\overline{\mathbf{I}_M(F_1)} + \mathbf{I}_M(F_2) \right) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) \quad (\text{E4.3}) \\ \equiv & \left(\mathbf{I}_M(F_1) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)} \right) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) \quad (\text{E1.2}) \\ \equiv & (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) + \left(\mathbf{I}_M(F_1) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)} \right) \quad (\text{E3.1}) \\ \equiv & ((\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) + \mathbf{I}_M(F_1)) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)} \quad (\text{E3.4}) \end{aligned}$$

Simplification de $[F]^M$: exemple

$$[(\neg F_1 \wedge F_2) \Rightarrow (F_3 \vee F_1)]^M = \overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1))$$

$$\begin{aligned} & \overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) \\ \equiv & \left(\overline{\mathbf{I}_M(F_1)} + \mathbf{I}_M(F_2) \right) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) \quad (\text{E4.3}) \\ \equiv & \left(\mathbf{I}_M(F_1) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)} \right) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) \quad (\text{E1.2}) \\ \equiv & (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) + \left(\mathbf{I}_M(F_1) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)} \right) \quad (\text{E3.1}) \\ \equiv & ((\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) + \mathbf{I}_M(F_1)) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)} \quad (\text{E3.4}) \\ \equiv & (\mathbf{I}_M(F_3) + (\mathbf{I}_M(F_1) + \mathbf{I}_M(F_1))) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)} \quad (\text{E3.4}) \end{aligned}$$

Simplification de $[F]^M$: exemple

$$[(\neg F_1 \wedge F_2) \Rightarrow (F_3 \vee F_1)]^M = \overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1))$$

$$\begin{aligned} & \overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) \\ \equiv & \left(\overline{\mathbf{I}_M(F_1)} + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)} \right) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) & \text{(E4.3)} \\ \equiv & \left(\mathbf{I}_M(F_1) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)} \right) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) & \text{(E1.2)} \\ \equiv & (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) + \left(\mathbf{I}_M(F_1) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)} \right) & \text{(E3.1)} \\ \equiv & ((\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) + \mathbf{I}_M(F_1)) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)} & \text{(E3.4)} \\ \equiv & (\mathbf{I}_M(F_3) + (\mathbf{I}_M(F_1) + \mathbf{I}_M(F_1))) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)} & \text{(E3.4)} \\ \equiv & (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)} & \text{(E3.5)} \end{aligned}$$

Simplification de $[F]^M$: exemple

$$[(\neg F_1 \wedge F_2) \Rightarrow (F_3 \vee F_1)]^M = \overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1))$$

$$\begin{aligned} & \overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) \\ \equiv & \left(\overline{\mathbf{I}_M(F_1)} + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)} \right) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) & \text{(E4.3)} \\ \equiv & \left(\mathbf{I}_M(F_1) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)} \right) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) & \text{(E1.2)} \\ \equiv & (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) + \left(\mathbf{I}_M(F_1) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)} \right) & \text{(E3.1)} \\ \equiv & ((\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) + \mathbf{I}_M(F_1)) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)} & \text{(E3.4)} \\ \equiv & (\mathbf{I}_M(F_3) + (\mathbf{I}_M(F_1) + \mathbf{I}_M(F_1))) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)} & \text{(E3.4)} \\ \equiv & (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)} & \text{(E3.5)} \end{aligned}$$

Evaluation d'une expression booléenne (calcul)

- algèbre de Boole minimale ($\mathbb{B}, \cdot, +, \neg$)
 - ▶ \mathbb{B} contient deux éléments distincts 0 et 1

Evaluation d'une expression booléenne (calcul)

- algèbre de Boole minimale ($\mathbb{B}, \cdot, +, -$)
 - ▶ \mathbb{B} contient deux éléments distincts 0 et 1
 - ▶ définition des opérateurs \cdot , $+$ et $-$:

a	b	$a \cdot b$	$a + b$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

a	\bar{a}
0	1
1	0

Evaluation d'une expression booléenne (calcul)

- algèbre de Boole minimale ($\mathbb{B}, \cdot, +, -$)
 - \mathbb{B} contient deux éléments distincts 0 et 1
 - définition des opérateurs \cdot , $+$ et $-$:

a	b	$a \cdot b$	$a + b$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

a	\bar{a}
0	1
1	0

- calcul du résultat de l'évaluation d'une expression booléenne par application des opérateurs sur leurs arguments

Evaluation d'une expression booléenne (calcul)

- algèbre de Boole minimale ($\mathbb{B}, \cdot, +, -$)
 - ▶ \mathbb{B} contient deux éléments distincts 0 et 1
 - ▶ définition des opérateurs \cdot , $+$ et $-$:

a	b	$a \cdot b$	$a + b$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

a	\bar{a}
0	1
1	0

- calcul du résultat de l'évaluation d'une expression booléenne par application des opérateurs sur leurs arguments
 - ▶ *exemple* $\overline{1 + 0 \cdot 1}$

Evaluation d'une expression booléenne (calcul)

- algèbre de Boole minimale ($\mathbb{B}, \cdot, +, -$)
 - ▶ \mathbb{B} contient deux éléments distincts 0 et 1
 - ▶ définition des opérateurs \cdot , $+$ et $-$:

a	b	$a \cdot b$	$a + b$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

a	\bar{a}
0	1
1	0

- calcul du résultat de l'évaluation d'une expression booléenne par application des opérateurs sur leurs arguments

▶ *exemple* $\overline{1 + 0} \cdot 1$
 $= \bar{1} \cdot 1$ application de l'opérateur $+$ ($1 + 0 = 1$)

Evaluation d'une expression booléenne (calcul)

- algèbre de Boole minimale ($\mathbb{B}, \cdot, +, -$)
 - ▶ \mathbb{B} contient deux éléments distincts 0 et 1
 - ▶ définition des opérateurs \cdot , $+$ et $-$:

a	b	$a \cdot b$	$a + b$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

a	\bar{a}
0	1
1	0

- calcul du résultat de l'évaluation d'une expression booléenne par application des opérateurs sur leurs arguments

- ▶ *exemple* $\overline{1 + 0} \cdot 1$
 - $= \bar{1} \cdot 1$ application de l'opérateur $+$ ($1 + 0 = 1$)
 - $= 0 \cdot 1$ application de l'opérateur $-$ ($\bar{1} = 0$)

Evaluation d'une expression booléenne (calcul)

- algèbre de Boole minimale ($\mathbb{B}, \cdot, +, -$)
 - ▶ \mathbb{B} contient deux éléments distincts 0 et 1
 - ▶ définition des opérateurs \cdot , $+$ et $-$:

a	b	$a \cdot b$	$a + b$		a	\bar{a}
0	0	0	0		0	1
0	1	0	1		1	0
1	0	0	1			
1	1	1	1			

- calcul du résultat de l'évaluation d'une expression booléenne par application des opérateurs sur leurs arguments

- ▶ *exemple* $\overline{1 + 0} \cdot 1$
 - $= \bar{1} \cdot 1$ application de l'opérateur $+$ ($1 + 0 = 1$)
 - $= 0 \cdot 1$ application de l'opérateur $-$ ($\bar{1} = 0$)
 - $= 0$ application de l'opérateur \cdot ($0 \cdot 1 = 0$)

Evaluation d'une expression booléenne (calcul)

- algèbre de Boole minimale ($\mathbb{B}, \cdot, +, -$)
 - ▶ \mathbb{B} contient deux éléments distincts 0 et 1
 - ▶ définition des opérateurs \cdot , $+$ et $-$:

a	b	$a \cdot b$	$a + b$		a	\bar{a}
0	0	0	0		0	1
0	1	0	1		1	0
1	0	0	1			
1	1	1	1			

- calcul du résultat de l'évaluation d'une expression booléenne par application des opérateurs sur leurs arguments

▶ *exemple* $\overline{1 + 0} \cdot 1$

$$= \overline{1} \cdot 1 \quad \text{application de l'opérateur } + \quad (1 + 0 = 1)$$

$$= 0 \cdot 1 \quad \text{application de l'opérateur } - \quad (\overline{1} = 0)$$

$$= 0 \quad \text{application de l'opérateur } \cdot \quad (0 \cdot 1 = 0)$$

- dans la pratique, on peut « mixer » calcul et raisonnement équationnel

Interprétation de $F = (\neg F_1 \wedge F_2) \Rightarrow (F_3 \vee F_1)$

- 1 construction d'une expression booléenne

$$[F]^M = \overline{\overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2)} + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1))$$

Interprétation de $F = (\neg F_1 \wedge F_2) \Rightarrow (F_3 \vee F_1)$

- 1 construction d'une expression booléenne

$$[F]^M = \overline{\overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2)} + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1))$$

- 2 simplification (raisonnement équationnel)

$$[F]^M \equiv (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)}$$

Interprétation de $F = (\neg F_1 \wedge F_2) \Rightarrow (F_3 \vee F_1)$

- 1 construction d'une expression booléenne

$$[F]^M = \overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1))$$

- 2 simplification (raisonnement équationnel)

$$[F]^M \equiv (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)}$$

- 3 interprétation des formules atomiques (selon la structure \mathbf{M})

▶ *exemple* : $\mathbf{I}_M(F_1) = 0$, $\mathbf{I}_M(F_2) = 1$ et $\mathbf{I}_M(F_3) = 1$

Interprétation de $F = (\neg F_1 \wedge F_2) \Rightarrow (F_3 \vee F_1)$

- 1 construction d'une expression booléenne

$$[F]^M = \overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1))$$

- 2 simplification (raisonnement équationnel)

$$[F]^M \equiv (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)}$$

- 3 interprétation des formules atomiques (selon la structure \mathbf{M})

▶ *exemple* : $\mathbf{I}_M(F_1) = 0$, $\mathbf{I}_M(F_2) = 1$ et $\mathbf{I}_M(F_3) = 1$

- 4 évaluation de l'expression booléenne (simplifiée) $[F]^M = (1 + 0) + \bar{1}$

Interprétation de $F = (\neg F_1 \wedge F_2) \Rightarrow (F_3 \vee F_1)$

- 1 construction d'une expression booléenne

$$[F]^M = \overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1))$$

- 2 simplification (raisonnement équationnel)

$$[F]^M \equiv (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)}$$

- 3 interprétation des formules atomiques (selon la structure \mathbf{M})

▶ *exemple* : $\mathbf{I}_M(F_1) = 0$, $\mathbf{I}_M(F_2) = 1$ et $\mathbf{I}_M(F_3) = 1$

- 4 évaluation de l'expression booléenne (simplifiée) $[F]^M = (1 + 0) + \bar{1}$
raisonnement équationnel

$$(1 + 0) + \bar{1}$$

Interprétation de $F = (\neg F_1 \wedge F_2) \Rightarrow (F_3 \vee F_1)$

- 1 construction d'une expression booléenne

$$[F]^M = \overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1))$$

- 2 simplification (raisonnement équationnel)

$$[F]^M \equiv (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)}$$

- 3 interprétation des formules atomiques (selon la structure \mathbf{M})

▶ *exemple* : $\mathbf{I}_M(F_1) = 0$, $\mathbf{I}_M(F_2) = 1$ et $\mathbf{I}_M(F_3) = 1$

- 4 évaluation de l'expression booléenne (simplifiée) $[F]^M = (1 + 0) + \bar{1}$
raisonnement équationnel

$$\begin{aligned} & (1 + 0) + \bar{1} \\ \equiv & 1 + \bar{1} \quad (\text{E3.3}) \end{aligned}$$

Interprétation de $F = (\neg F_1 \wedge F_2) \Rightarrow (F_3 \vee F_1)$

- 1 construction d'une expression booléenne

$$[F]^M = \overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1))$$

- 2 simplification (raisonnement équationnel)

$$[F]^M \equiv (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)}$$

- 3 interprétation des formules atomiques (selon la structure \mathbf{M})

▶ *exemple* : $\mathbf{I}_M(F_1) = 0$, $\mathbf{I}_M(F_2) = 1$ et $\mathbf{I}_M(F_3) = 1$

- 4 évaluation de l'expression booléenne (simplifiée) $[F]^M = (1 + 0) + \bar{1}$
raisonnement équationnel

$$\begin{aligned} & (1 + 0) + \bar{1} \\ \equiv & 1 + \bar{1} && \text{(E3.3)} \\ \equiv & 1 && \text{(E3.3)} \end{aligned}$$

Interprétation de $F = (\neg F_1 \wedge F_2) \Rightarrow (F_3 \vee F_1)$

- 1 construction d'une expression booléenne

$$[F]^M = \overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1))$$

- 2 simplification (raisonnement équationnel)

$$[F]^M \equiv (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)}$$

- 3 interprétation des formules atomiques (selon la structure \mathbf{M})

▶ *exemple* : $\mathbf{I}_M(F_1) = 0$, $\mathbf{I}_M(F_2) = 1$ et $\mathbf{I}_M(F_3) = 1$

- 4 évaluation de l'expression booléenne (simplifiée) $[F]^M = (1 + 0) + \bar{1}$

raisonnement équationnel

$$\begin{aligned} & (1 + 0) + \bar{1} \\ \equiv & 1 + \bar{1} & \text{(E3.3)} \\ \equiv & 1 & \text{(E3.3)} \end{aligned}$$

calcul

$$(1 + 0) + \bar{1}$$

Interprétation de $F = (\neg F_1 \wedge F_2) \Rightarrow (F_3 \vee F_1)$

- 1 construction d'une expression booléenne

$$[F]^M = \overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1))$$

- 2 simplification (raisonnement équationnel)

$$[F]^M \equiv (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)}$$

- 3 interprétation des formules atomiques (selon la structure \mathbf{M})

▶ *exemple* : $\mathbf{I}_M(F_1) = 0$, $\mathbf{I}_M(F_2) = 1$ et $\mathbf{I}_M(F_3) = 1$

- 4 évaluation de l'expression booléenne (simplifiée) $[F]^M = (1 + 0) + \bar{1}$

raisonnement équationnel

$$\begin{aligned} & (1 + 0) + \bar{1} \\ \equiv & 1 + \bar{1} & \text{(E3.3)} \\ \equiv & 1 & \text{(E3.3)} \end{aligned}$$

calcul

$$\begin{aligned} & (1 + 0) + \bar{1} \\ = & 1 + \bar{1} & (1 + 0 = 1) \end{aligned}$$

Interprétation de $F = (\neg F_1 \wedge F_2) \Rightarrow (F_3 \vee F_1)$

- 1 construction d'une expression booléenne

$$[F]^M = \overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1))$$

- 2 simplification (raisonnement équationnel)

$$[F]^M \equiv (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)}$$

- 3 interprétation des formules atomiques (selon la structure \mathbf{M})

▶ *exemple* : $\mathbf{I}_M(F_1) = 0$, $\mathbf{I}_M(F_2) = 1$ et $\mathbf{I}_M(F_3) = 1$

- 4 évaluation de l'expression booléenne (simplifiée) $[F]^M = (1 + 0) + \bar{1}$

raisonnement équationnel

$$\begin{aligned} & (1 + 0) + \bar{1} \\ \equiv & 1 + \bar{1} & \text{(E3.3)} \\ \equiv & 1 & \text{(E3.3)} \end{aligned}$$

calcul

$$\begin{aligned} & (1 + 0) + \bar{1} \\ = & 1 + \bar{1} & (1 + 0 = 1) \\ = & 1 + 0 & (\bar{1} = 0) \end{aligned}$$

Interprétation de $F = (\neg F_1 \wedge F_2) \Rightarrow (F_3 \vee F_1)$

- 1 construction d'une expression booléenne

$$[F]^M = \overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1))$$

- 2 simplification (raisonnement équationnel)

$$[F]^M \equiv (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)}$$

- 3 interprétation des formules atomiques (selon la structure \mathbf{M})

▶ *exemple* : $\mathbf{I}_M(F_1) = 0$, $\mathbf{I}_M(F_2) = 1$ et $\mathbf{I}_M(F_3) = 1$

- 4 évaluation de l'expression booléenne (simplifiée) $[F]^M = (1 + 0) + \bar{1}$

raisonnement équationnel

$$\begin{aligned} & (1 + 0) + \bar{1} \\ \equiv & 1 + \bar{1} & \text{(E3.3)} \\ \equiv & 1 & \text{(E3.3)} \end{aligned}$$

calcul

$$\begin{aligned} & (1 + 0) + \bar{1} \\ = & 1 + \bar{1} & (1 + 0 = 1) \\ = & 1 + 0 & (\bar{1} = 0) \\ = & 1 & (1 + 0 = 1) \end{aligned}$$

Interprétation de $F = (\neg F_1 \wedge F_2) \Rightarrow (F_3 \vee F_1)$

- 1 construction d'une expression booléenne

$$[F]^M = \overline{\mathbf{I}_M(F_1)} \cdot \mathbf{I}_M(F_2) + (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1))$$

- 2 simplification (raisonnement équationnel)

$$[F]^M \equiv (\mathbf{I}_M(F_3) + \mathbf{I}_M(F_1)) + \overline{\mathbf{I}_M(F_2)}$$

- 3 interprétation des formules atomiques (selon la structure \mathbf{M})

▶ *exemple* : $\mathbf{I}_M(F_1) = 0$, $\mathbf{I}_M(F_2) = 1$ et $\mathbf{I}_M(F_3) = 1$

- 4 évaluation de l'expression booléenne (simplifiée) $[F]^M = (1 + 0) + \bar{1}$

raisonnement équationnel

$$\begin{aligned} & (1 + 0) + \bar{1} \\ \equiv & 1 + \bar{1} & \text{(E3.3)} \\ \equiv & 1 & \text{(E3.3)} \end{aligned}$$

calcul

$$\begin{aligned} & (1 + 0) + \bar{1} \\ = & 1 + \bar{1} & (1 + 0 = 1) \\ = & 1 + 0 & (\bar{1} = 0) \\ = & 1 & (1 + 0 = 1) \end{aligned}$$

$$[F]^M = 1$$

Tables de vérité

- la valeur de $[F]^M$ ne dépend que des valeurs booléennes associées par M aux formules atomiques apparaissant dans F

Tables de vérité

- la valeur de $[F]^M$ ne dépend que des valeurs booléennes associées par M aux formules atomiques apparaissant dans F
- exemple* : table de vérité pour $F = (\neg F_1 \wedge F_2) \Rightarrow (F_3 \vee F_1)$

$I_M(F_1)$	$I_M(F_2)$	$I_M(F_3)$	$[F]^M = (I_M(F_3) + I_M(F_1)) + \overline{I_M(F_2)}$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Formules logiques / Expressions booléennes

quelles différences entre $F = \neg(F_1 \vee F_2)$ et $[F]^M = \overline{\mathbf{I}_M(F_1) + \mathbf{I}_M(F_2)}$?

Formules logiques / Expressions booléennes

quelles différences entre $F = \neg(F_1 \vee F_2)$ et $[F]^M = \overline{\mathbf{I}_M(F_1) + \mathbf{I}_M(F_2)}$?

- $\overline{\mathbf{I}_M(F_1) + \mathbf{I}_M(F_2)}$ est une expression booléenne
 - ▶ $\mathbf{I}_M(F_1)$ et $\mathbf{I}_M(F_2)$ sont des booléens (des valeurs dans $\mathbb{B} = \{0, 1\}$)

Formules logiques / Expressions booléennes

quelles différences entre $F = \neg(F_1 \vee F_2)$ et $[F]^M = \overline{I_M(F_1) + I_M(F_2)}$?

- $\overline{I_M(F_1) + I_M(F_2)}$ est une expression booléenne
 - ▶ $I_M(F_1)$ et $I_M(F_2)$ sont des booléens (des valeurs dans $\mathbb{B} = \{0, 1\}$)
 - ▶ le résultat de l'évaluation de $\overline{I_M(F_1) + I_M(F_2)}$ est un booléen
 - ★ l'évaluation d'une expression booléenne est déterministe : le résultat est unique

Formules logiques / Expressions booléennes

quelles différences entre $F = \neg(F_1 \vee F_2)$ et $[F]^M = \overline{\mathbf{I}_M(F_1) + \mathbf{I}_M(F_2)}$?

- $\overline{\mathbf{I}_M(F_1) + \mathbf{I}_M(F_2)}$ est une expression booléenne
 - ▶ $\mathbf{I}_M(F_1)$ et $\mathbf{I}_M(F_2)$ sont des booléens (des valeurs dans $\mathbb{B} = \{0, 1\}$)
 - ▶ le résultat de l'évaluation de $\overline{\mathbf{I}_M(F_1) + \mathbf{I}_M(F_2)}$ est un booléen
 - ★ l'évaluation d'une expression booléenne est déterministe : le résultat est unique
- $\neg(F_1 \vee F_2)$ est une formule de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

Formules logiques / Expressions booléennes

quelles différences entre $F = \neg(F_1 \vee F_2)$ et $[F]^M = \overline{\mathbf{I}_M(F_1) + \mathbf{I}_M(F_2)}$?

- $\overline{\mathbf{I}_M(F_1) + \mathbf{I}_M(F_2)}$ est une expression booléenne
 - ▶ $\mathbf{I}_M(F_1)$ et $\mathbf{I}_M(F_2)$ sont des booléens (des valeurs dans $\mathbb{B} = \{0, 1\}$)
 - ▶ le résultat de l'évaluation de $\overline{\mathbf{I}_M(F_1) + \mathbf{I}_M(F_2)}$ est un booléen
 - ★ l'évaluation d'une expression booléenne est déterministe : le résultat est unique
- $\neg(F_1 \vee F_2)$ est une formule de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$
 - ▶ cette formule est « vraie » dans certaines structures
 - ★ si $\mathbf{I}_M(F_1) = 0$ et $\mathbf{I}_M(F_2) = 0$,

$$[\neg(F_1 \vee F_2)]^M = \overline{\mathbf{I}_M(F_1) + \mathbf{I}_M(F_2)} = \overline{0 + 0} = 1$$

Formules logiques / Expressions booléennes

quelles différences entre $F = \neg(F_1 \vee F_2)$ et $[F]^M = \overline{\mathbf{I}_M(F_1) + \mathbf{I}_M(F_2)}$?

- $\overline{\mathbf{I}_M(F_1) + \mathbf{I}_M(F_2)}$ est une expression booléenne
 - ▶ $\mathbf{I}_M(F_1)$ et $\mathbf{I}_M(F_2)$ sont des booléens (des valeurs dans $\mathbb{B} = \{0, 1\}$)
 - ▶ le résultat de l'évaluation de $\overline{\mathbf{I}_M(F_1) + \mathbf{I}_M(F_2)}$ est un booléen
 - ★ l'évaluation d'une expression booléenne est déterministe : le résultat est unique
- $\neg(F_1 \vee F_2)$ est une formule de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$: c'est une formule **contingente**
 - ▶ cette formule est « vraie » dans certaines structures
 - ★ si $\mathbf{I}_M(F_1) = 0$ et $\mathbf{I}_M(F_2) = 0$,

$$[\neg(F_1 \vee F_2)]^M = \overline{\mathbf{I}_M(F_1) + \mathbf{I}_M(F_2)} = \overline{0 + 0} = 1$$
 - ▶ cette formule est « fausse » dans certaines structures
 - ★ si $\mathbf{I}_M(F_1) = 1$ et $\mathbf{I}_M(F_2) = 0$,

$$[\neg(F_1 \vee F_2)]^M = \overline{\mathbf{I}_M(F_1) + \mathbf{I}_M(F_2)} = \overline{1 + 0} = 0$$

Formules logiques / Expressions booléennes

quelles différences entre $F = \neg(F_1 \vee F_2)$ et $[F]^M = \overline{\mathbf{I}_M(F_1) + \mathbf{I}_M(F_2)}$?

- $\overline{\mathbf{I}_M(F_1) + \mathbf{I}_M(F_2)}$ est une expression booléenne
 - ▶ $\mathbf{I}_M(F_1)$ et $\mathbf{I}_M(F_2)$ sont des booléens (des valeurs dans $\mathbb{B} = \{0, 1\}$)
 - ▶ le résultat de l'évaluation de $\overline{\mathbf{I}_M(F_1) + \mathbf{I}_M(F_2)}$ est un booléen
 - ★ l'évaluation d'une expression booléenne est déterministe : le résultat est unique
- $\neg(F_1 \vee F_2)$ est une formule de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$: c'est une formule **contingente**
 - ▶ cette formule est « vraie » dans certaines structures
 - ★ si $\mathbf{I}_M(F_1) = 0$ et $\mathbf{I}_M(F_2) = 0$,

$$[\neg(F_1 \vee F_2)]^M = \overline{\mathbf{I}_M(F_1) + \mathbf{I}_M(F_2)} = \overline{0 + 0} = 1$$
 - ▶ cette formule est « fausse » dans certaines structures
 - ★ si $\mathbf{I}_M(F_1) = 1$ et $\mathbf{I}_M(F_2) = 0$,

$$[\neg(F_1 \vee F_2)]^M = \overline{\mathbf{I}_M(F_1) + \mathbf{I}_M(F_2)} = \overline{1 + 0} = 0$$

il existe des formules « toujours vraies » et des formules « toujours fausses »

Formules satisfiables – Formules valides

- une formule F est **satisfiable** ssi il existe une structure \mathbf{M} telle que $[F]^{\mathbf{M}} = 1$ (\mathbf{M} est un **modèle** de F)
 - ▶ $\neg(F_1 \vee F_2)$ est satisfiable : avec la structure \mathbf{M} telle que $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1) = 0$ et $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2) = 0$, $[\neg(F_1 \vee F_2)]^{\mathbf{M}} = 1$

Formules satisfiables – Formules valides

- une formule F est **satisfiable** ssi il existe une structure \mathbf{M} telle que $[F]^{\mathbf{M}} = 1$ (\mathbf{M} est un **modèle** de F)
 - ▶ $\neg(F_1 \vee F_2)$ est satisfiable : avec la structure \mathbf{M} telle que $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1) = 0$ et $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2) = 0$, $[\neg(F_1 \vee F_2)]^{\mathbf{M}} = 1$
- une formule F est **insatisfiable** ssi il n'existe aucune structure \mathbf{M} telle que $[F]^{\mathbf{M}} = 1$
 - ▶ $F_0 \wedge \neg F_0$ est insatisfiable : $[F_0 \wedge \neg F_0]^{\mathbf{M}} = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_0) \cdot \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_0)} = 0$ pour toute structure \mathbf{M}

Formules satisfiables – Formules valides

- une formule F est **satisfiable** ssi il existe une structure \mathbf{M} telle que $[F]^{\mathbf{M}} = 1$ (\mathbf{M} est un **modèle** de F)
 - ▶ $\neg(F_1 \vee F_2)$ est satisfiable : avec la structure \mathbf{M} telle que $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1) = 0$ et $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2) = 0$, $[\neg(F_1 \vee F_2)]^{\mathbf{M}} = 1$
- une formule F est **insatisfiable** ssi il n'existe aucune structure \mathbf{M} telle que $[F]^{\mathbf{M}} = 1$
 - ▶ $F_0 \wedge \neg F_0$ est insatisfiable : $[F_0 \wedge \neg F_0]^{\mathbf{M}} = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_0) \cdot \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_0)} = 0$ pour toute structure \mathbf{M}
- une formule F est **valide** ssi pour toute structure \mathbf{M} , $[F]^{\mathbf{M}} = 1$
 - ▶ $F_0 \vee \neg F_0$ est valide : $[F_0 \vee \neg F_0]^{\mathbf{M}} = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_0) + \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_0)} = 1$ pour toute structure \mathbf{M}

Formules satisfiables – Formules valides

- une formule F est **satisfiable** ssi il existe une structure \mathbf{M} telle que $[F]^{\mathbf{M}} = 1$ (\mathbf{M} est un **modèle** de F)
 - ▶ $\neg(F_1 \vee F_2)$ est satisfiable : avec la structure \mathbf{M} telle que $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1) = 0$ et $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2) = 0$, $[\neg(F_1 \vee F_2)]^{\mathbf{M}} = 1$
- une formule F est **insatisfiable** ssi il n'existe aucune structure \mathbf{M} telle que $[F]^{\mathbf{M}} = 1$
 - ▶ $F_0 \wedge \neg F_0$ est insatisfiable : $[F_0 \wedge \neg F_0]^{\mathbf{M}} = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_0) \cdot \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_0)} = 0$ pour toute structure \mathbf{M}
- une formule F est **valide** ssi pour toute structure \mathbf{M} , $[F]^{\mathbf{M}} = 1$
 - ▶ $F_0 \vee \neg F_0$ est valide : $[F_0 \vee \neg F_0]^{\mathbf{M}} = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_0) + \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_0)} = 1$ pour toute structure \mathbf{M}
- propriétés :
 - ▶ F est **valide** ssi $\neg F$ est **insatisfiable**
 - ▶ F est **insatisfiable** ssi $\neg F$ est **valide**

Conséquence sémantique

- $F_2 \models F_1$: la formule F_1 est **conséquence sémantique** de la formule F_2 ssi pour toute structure \mathbf{M} telle que $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$, on a $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$

Conséquence sémantique

- $F_2 \models F_1$: la formule F_1 est **conséquence sémantique** de la formule F_2 ssi pour toute structure \mathbf{M} telle que $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$, on a $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$
 - ▶ *exemple* : $F_1, F_2 \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$
 $F_1 \models (F_2 \Rightarrow F_1)$ car pour toute structure \mathbf{M} telle que $[F_1]^{\mathbf{M}} = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1) = 1$ on a
 $[F_2 \Rightarrow F_1]^{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2)} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1) = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2)} + 1 = 1$

Conséquence sémantique

- $F_2 \models F_1$: la formule F_1 est **conséquence sémantique** de la formule F_2 ssi pour toute structure \mathbf{M} telle que $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$, on a $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$

▶ *exemple* : $F_1, F_2 \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

$F_1 \models (F_2 \Rightarrow F_1)$ car pour toute structure \mathbf{M} telle que

$[F_1]^{\mathbf{M}} = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1) = 1$ on a

$$[F_2 \Rightarrow F_1]^{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2)} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1) = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2)} + 1 = 1$$

$\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1) = [F_1]^{\mathbf{M}}$	$\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2)$	$[F_2 \Rightarrow F_1]^{\mathbf{M}}$
0		
0		
1	0	
1	1	

Conséquence sémantique

- $F_2 \models F_1$: la formule F_1 est **conséquence sémantique** de la formule F_2 ssi pour toute structure \mathbf{M} telle que $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$, on a $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$

▶ *exemple* : $F_1, F_2 \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

$F_1 \models (F_2 \Rightarrow F_1)$ car pour toute structure \mathbf{M} telle que

$[F_1]^{\mathbf{M}} = \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1) = 1$ on a

$$[F_2 \Rightarrow F_1]^{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2)} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1) = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2)} + 1 = 1$$

$\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1) = [F_1]^{\mathbf{M}}$	$\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2)$	$[F_2 \Rightarrow F_1]^{\mathbf{M}}$
0		
0		
<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">1</div> →	0	→ <div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">1</div>
<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">1</div> →	1	→ <div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">1</div>

Conséquence sémantique

- $F_2 \models F_1$: la formule F_1 est **conséquence sémantique** de la formule F_2 ssi pour toute structure \mathbf{M} telle que $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$, on a $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$
- propriété : $F_2 \models F_1$ ssi $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide

Conséquence sémantique

- $F_2 \models F_1$: la formule F_1 est **conséquence sémantique** de la formule F_2 ssi pour toute structure \mathbf{M} telle que $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$, on a $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$
- propriété : $F_2 \models F_1$ ssi $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide
 - ▶ supposons $F_2 \models F_1$ et montrons que $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide

Conséquence sémantique

- $F_2 \models F_1$: la formule F_1 est **conséquence sémantique** de la formule F_2 ssi pour toute structure \mathbf{M} telle que $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$, on a $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$
- propriété : $F_2 \models F_1$ ssi $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide
 - ▶ supposons $F_2 \models F_1$ et montrons que $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide
soit \mathbf{M} une structure quelconque, montrons
 $[F_2 \Rightarrow F_1]^{\mathbf{M}} = \overline{[F_2]^{\mathbf{M}}} + [F_1]^{\mathbf{M}} = 1$

Conséquence sémantique

- $F_2 \models F_1$: la formule F_1 est **conséquence sémantique** de la formule F_2 ssi pour toute structure \mathbf{M} telle que $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$, on a $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$
- propriété : $F_2 \models F_1$ ssi $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide
 - ▶ supposons $F_2 \models F_1$ et montrons que $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide
soit \mathbf{M} une structure quelconque, montrons
 $[F_2 \Rightarrow F_1]^{\mathbf{M}} = \overline{[F_2]^{\mathbf{M}}} + [F_1]^{\mathbf{M}} = 1$
raisonnement par cas :
si $[F_2]^{\mathbf{M}} = 0$, alors $\overline{[F_2]^{\mathbf{M}}} + [F_1]^{\mathbf{M}} = 1 + [F_1]^{\mathbf{M}} = 1$

Conséquence sémantique

- $F_2 \models F_1$: la formule F_1 est **conséquence sémantique** de la formule F_2 ssi pour toute structure \mathbf{M} telle que $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$, on a $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$
- propriété : $F_2 \models F_1$ ssi $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide

- ▶ supposons $F_2 \models F_1$ et montrons que $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide
soit \mathbf{M} une structure quelconque, montrons

$$[F_2 \Rightarrow F_1]^{\mathbf{M}} = \overline{[F_2]^{\mathbf{M}}} + [F_1]^{\mathbf{M}} = 1$$

raisonnement par cas :

si $[F_2]^{\mathbf{M}} = 0$, alors $\overline{[F_2]^{\mathbf{M}}} + [F_1]^{\mathbf{M}} = 1 + [F_1]^{\mathbf{M}} = 1$

si $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$, alors puisque $F_2 \models F_1$, on a $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$ et donc

$$\overline{[F_2]^{\mathbf{M}}} + [F_1]^{\mathbf{M}} = 0 + 1 = 1$$

Conséquence sémantique

- $F_2 \models F_1$: la formule F_1 est **conséquence sémantique** de la formule F_2 ssi pour toute structure \mathbf{M} telle que $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$, on a $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$
- propriété : $F_2 \models F_1$ ssi $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide
 - ▶ supposons que $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide et montrons $F_2 \models F_1$

Conséquence sémantique

- $F_2 \models F_1$: la formule F_1 est **conséquence sémantique** de la formule F_2 ssi pour toute structure \mathbf{M} telle que $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$, on a $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$
- propriété : $F_2 \models F_1$ ssi $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide
 - ▶ supposons que $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide et montrons $F_2 \models F_1$
soit \mathbf{M} une structure telle que $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$, montrons que $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$

Conséquence sémantique

- $F_2 \models F_1$: la formule F_1 est **conséquence sémantique** de la formule F_2 ssi pour toute structure \mathbf{M} telle que $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$, on a $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$
- propriété : $F_2 \models F_1$ ssi $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide
 - ▶ supposons que $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide et montrons $F_2 \models F_1$
soit \mathbf{M} une structure telle que $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$, montrons que $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$
puisque $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide, on a $[F_2 \Rightarrow F_1]^{\mathbf{M}} = \overline{[F_2]^{\mathbf{M}}} + [F_1]^{\mathbf{M}} = 1$

Conséquence sémantique

- $F_2 \models F_1$: la formule F_1 est **conséquence sémantique** de la formule F_2 ssi pour toute structure \mathbf{M} telle que $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$, on a $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$
- propriété : $F_2 \models F_1$ ssi $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide
 - ▶ supposons que $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide et montrons $F_2 \models F_1$
soit \mathbf{M} une structure telle que $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$, montrons que $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$
puisque $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide, on a $[F_2 \Rightarrow F_1]^{\mathbf{M}} = \overline{[F_2]^{\mathbf{M}}} + [F_1]^{\mathbf{M}} = 1$
et donc $0 + [F_1]^{\mathbf{M}} = 1$ c-à-d $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$

Conséquence sémantique

- $F_2 \models F_1$: la formule F_1 est **conséquence sémantique** de la formule F_2 ssi pour toute structure \mathbf{M} telle que $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$, on a $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$
- propriété : $F_2 \models F_1$ ssi $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide
- $\{F_1, \dots, F_n\} \models F$: la formule F est **conséquence sémantique** de l'ensemble fini de formules $\{F_1, \dots, F_n\}$ ssi pour toute structure \mathbf{M} telle que $[F_1 \wedge \dots \wedge F_n]^{\mathbf{M}} = \prod_{i=1}^n [F_i]^{\mathbf{M}} = 1$, on a $[F]^{\mathbf{M}} = 1$

Conséquence sémantique

- $F_2 \models F_1$: la formule F_1 est **conséquence sémantique** de la formule F_2 ssi pour toute structure \mathbf{M} telle que $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$, on a $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$
- propriété : $F_2 \models F_1$ ssi $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide
- $\{F_1, \dots, F_n\} \models F$: la formule F est **conséquence sémantique** de l'ensemble fini de formules $\{F_1, \dots, F_n\}$ ssi pour toute structure \mathbf{M} telle que $[F_1 \wedge \dots \wedge F_n]^{\mathbf{M}} = \prod_{i=1}^n [F_i]^{\mathbf{M}} = 1$, on a $[F]^{\mathbf{M}} = 1$
 - ▶ *exemple* : $\{F_1, F_1 \Rightarrow F_2\} \models F_2$ $F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$
 soit \mathbf{M} une structure telle que $[F_1 \wedge (F_1 \Rightarrow F_2)]^{\mathbf{M}} = 1$, on a
 $[F_1 \wedge (F_1 \Rightarrow F_2)]^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1) \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2)$, et donc $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2) = 1$

Conséquence sémantique

- $F_2 \models F_1$: la formule F_1 est **conséquence sémantique** de la formule F_2 ssi pour toute structure \mathbf{M} telle que $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$, on a $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$
- propriété : $F_2 \models F_1$ ssi $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide
- $\{F_1, \dots, F_n\} \models F$: la formule F est **conséquence sémantique** de l'ensemble fini de formules $\{F_1, \dots, F_n\}$ ssi pour toute structure \mathbf{M} telle que $[F_1 \wedge \dots \wedge F_n]^{\mathbf{M}} = \prod_{i=1}^n [F_i]^{\mathbf{M}} = 1$, on a $[F]^{\mathbf{M}} = 1$
 - ▶ *exemple* : $\{F_1, F_1 \Rightarrow F_2\} \models F_2$ $F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$
soit \mathbf{M} une structure telle que $[F_1 \wedge (F_1 \Rightarrow F_2)]^{\mathbf{M}} = 1$, on a $[F_1 \wedge (F_1 \Rightarrow F_2)]^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1) \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2)$, et donc $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2) = 1$

$\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1) = [F_1]^{\mathbf{M}}$	$\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2)$	$[F_1 \Rightarrow F_2]^{\mathbf{M}}$	$[F_1 \wedge (F_1 \Rightarrow F_2)]^{\mathbf{M}}$	$[F_2]^{\mathbf{M}}$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1

Conséquence sémantique

- $F_2 \models F_1$: la formule F_1 est **conséquence sémantique** de la formule F_2 ssi pour toute structure \mathbf{M} telle que $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$, on a $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$
- propriété : $F_2 \models F_1$ ssi $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide
- $\{F_1, \dots, F_n\} \models F$: la formule F est **conséquence sémantique** de l'ensemble fini de formules $\{F_1, \dots, F_n\}$ ssi pour toute structure \mathbf{M} telle que $[F_1 \wedge \dots \wedge F_n]^{\mathbf{M}} = \prod_{i=1}^n [F_i]^{\mathbf{M}} = 1$, on a $[F]^{\mathbf{M}} = 1$
 - ▶ *exemple* : $\{F_1, F_1 \Rightarrow F_2\} \models F_2$ $F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$
 soit \mathbf{M} une structure telle que $[F_1 \wedge (F_1 \Rightarrow F_2)]^{\mathbf{M}} = 1$, on a $[F_1 \wedge (F_1 \Rightarrow F_2)]^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1) \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2)$, et donc $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2) = 1$

$\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1) = [F_1]^{\mathbf{M}}$	$\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2)$	$[F_1 \Rightarrow F_2]^{\mathbf{M}}$	$[F_1 \wedge (F_1 \Rightarrow F_2)]^{\mathbf{M}}$	$[F_2]^{\mathbf{M}}$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1 \rightarrow	1	1 \rightarrow	\rightarrow 1 \rightarrow	\rightarrow 1



Conséquence sémantique

- $F_2 \models F_1$: la formule F_1 est **conséquence sémantique** de la formule F_2 ssi pour toute structure \mathbf{M} telle que $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$, on a $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$
- propriété : $F_2 \models F_1$ ssi $F_2 \Rightarrow F_1$ est valide
- $\{F_1, \dots, F_n\} \models F$: la formule F est **conséquence sémantique** de l'ensemble fini de formules $\{F_1, \dots, F_n\}$ ssi pour toute structure \mathbf{M} telle que $[F_1 \wedge \dots \wedge F_n]^{\mathbf{M}} = \prod_{i=1}^n [F_i]^{\mathbf{M}} = 1$, on a $[F]^{\mathbf{M}} = 1$
- propriété : $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \models F$ ssi $(F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n) \Rightarrow F$ est valide

Formules logiquement équivalentes

- $F_1 \models F_2$ ssi pour toute structure \mathbf{M} , $[F_1]^{\mathbf{M}} = [F_2]^{\mathbf{M}}$

Formules logiquement équivalentes

- $F_1 \models F_2$ ssi pour toute structure \mathbf{M} , $[F_1]^{\mathbf{M}} = [F_2]^{\mathbf{M}}$
 - ▶ \models est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique, transitive)

Formules logiquement équivalentes

- $F_1 \models F_2$ ssi pour toute structure \mathbf{M} , $[F_1]^{\mathbf{M}} = [F_2]^{\mathbf{M}}$

▶ *exemple* : $\neg(F_1 \vee F_2) \models \neg F_1 \wedge \neg F_2$

$F_1, F_2 \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

Formules logiquement équivalentes

- $F_1 \models F_2$ ssi pour toute structure \mathbf{M} , $[F_1]^{\mathbf{M}} = [F_2]^{\mathbf{M}}$

▶ *exemple* : $\neg(F_1 \vee F_2) \models \neg F_1 \wedge \neg F_2$

$F_1, F_2 \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

$$[\neg(F_1 \vee F_2)]^{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1) + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2)}$$

Formules logiquement équivalentes

- $F_1 \models F_2$ ssi pour toute structure \mathbf{M} , $[F_1]^{\mathbf{M}} = [F_2]^{\mathbf{M}}$

▶ *exemple* : $\neg(F_1 \vee F_2) \models \neg F_1 \wedge \neg F_2$

$F_1, F_2 \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

$$[\neg(F_1 \vee F_2)]^{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1) + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2)}$$

$$[\neg F_1 \wedge \neg F_2]^{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1)} \cdot \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2)}$$

Formules logiquement équivalentes

- $F_1 \models F_2$ ssi pour toute structure \mathbf{M} , $[F_1]^{\mathbf{M}} = [F_2]^{\mathbf{M}}$

▶ *exemple* : $\neg(F_1 \vee F_2) \models \neg F_1 \wedge \neg F_2$

$F_1, F_2 \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

$$[\neg(F_1 \vee F_2)]^{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1) + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2)}$$

$$[\neg F_1 \wedge \neg F_2]^{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1)} \cdot \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2)}$$

$$\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1) + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2)} \equiv \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1)} \cdot \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2)}$$

pour toute structure \mathbf{M} , les expressions booléennes $[\neg(F_1 \vee F_2)]^{\mathbf{M}}$ et $[\neg F_1 \wedge \neg F_2]^{\mathbf{M}}$ s'évaluent à la même valeur booléenne

Formules logiquement équivalentes

- $F_1 \models F_2$ ssi pour toute structure \mathbf{M} , $[F_1]^{\mathbf{M}} = [F_2]^{\mathbf{M}}$

▶ *exemple* : $\neg(F_1 \vee F_2) \models \neg F_1 \wedge \neg F_2$

$F_1, F_2 \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$

$$[\neg(F_1 \vee F_2)]^{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1) + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2)}$$

$$[\neg F_1 \wedge \neg F_2]^{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1)} \cdot \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2)}$$

$$\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1) + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2)} \equiv \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_1)} \cdot \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(F_2)}$$

pour toute structure \mathbf{M} , les expressions booléennes $[\neg(F_1 \vee F_2)]^{\mathbf{M}}$ et $[\neg F_1 \wedge \neg F_2]^{\mathbf{M}}$ s'évaluent à la même valeur booléenne

les formules $\neg(F_1 \vee F_2)$ et $\neg F_1 \wedge \neg F_2$ sont dans la même classe d'équivalence (pour \models)

Formules logiquement équivalentes

- $F_1 \equiv F_2$ ssi pour toute structure \mathbf{M} , $[F_1]^{\mathbf{M}} = [F_2]^{\mathbf{M}}$
 - ▶ \equiv est une congruence pour \neg , \Rightarrow , \wedge , \vee

Formules logiquement équivalentes

- $F_1 \models F_2$ ssi pour toute structure \mathbf{M} , $[F_1]^{\mathbf{M}} = [F_2]^{\mathbf{M}}$
 - ▶ \models est une congruence pour $\neg, \Rightarrow, \wedge, \vee$

si $F \models F'$, alors $\neg F \models \neg F'$

si $F_1 \models F'_1$ et $F_2 \models F'_2$, alors :

$$F_1 \Rightarrow F_2 \models F'_1 \Rightarrow F'_2$$

$$F_1 \wedge F_2 \models F'_1 \wedge F'_2$$

$$F_1 \vee F_2 \models F'_1 \vee F'_2$$

Formules logiquement équivalentes

- $F_1 \models F_2$ ssi pour toute structure \mathbf{M} , $[F_1]^{\mathbf{M}} = [F_2]^{\mathbf{M}}$
- propriété : $F_1 \models F_2$ ssi $F_1 \models F_2$ et $F_2 \models F_1$

Formules logiquement équivalentes

- $F_1 \models F_2$ ssi pour toute structure \mathbf{M} , $[F_1]^{\mathbf{M}} = [F_2]^{\mathbf{M}}$
- propriété : $F_1 \models F_2$ ssi $F_1 \models F_2$ et $F_2 \models F_1$
 - ▶ supposons $F_1 \models F_2$
 - ★ montrons $F_1 \models F_2$

Formules logiquement équivalentes

- $F_1 \equiv F_2$ ssi pour toute structure \mathbf{M} , $[F_1]^{\mathbf{M}} = [F_2]^{\mathbf{M}}$
- propriété : $F_1 \equiv F_2$ ssi $F_1 \models F_2$ et $F_2 \models F_1$
 - ▶ supposons $F_1 \equiv F_2$
 - ★ montrons $F_1 \models F_2$
soit \mathbf{M} une structure telle que $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$

Formules logiquement équivalentes

- $F_1 \models F_2$ ssi pour toute structure \mathbf{M} , $[F_1]^{\mathbf{M}} = [F_2]^{\mathbf{M}}$
- propriété : $F_1 \models F_2$ ssi $F_1 \models F_2$ et $F_2 \models F_1$
 - ▶ supposons $F_1 \models F_2$
 - ★ montrons $F_1 \models F_2$
soit \mathbf{M} une structure telle que $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$
puisque $F_1 \models F_2$, on a $[F_1]^{\mathbf{M}} = [F_2]^{\mathbf{M}} = 1$
et donc $F_1 \models F_2$

Formules logiquement équivalentes

- $F_1 \models F_2$ ssi pour toute structure \mathbf{M} , $[F_1]^{\mathbf{M}} = [F_2]^{\mathbf{M}}$
- propriété : $F_1 \models F_2$ ssi $F_1 \models F_2$ et $F_2 \models F_1$
 - ▶ supposons $F_1 \models F_2$
 - ★ montrons $F_1 \models F_2$
soit \mathbf{M} une structure telle que $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$
puisque $F_1 \models F_2$, on a $[F_1]^{\mathbf{M}} = [F_2]^{\mathbf{M}} = 1$
et donc $F_1 \models F_2$
 - ★ raisonnement similaire pour montrer $F_2 \models F_1$

Formules logiquement équivalentes

- $F_1 \models F_2$ ssi pour toute structure \mathbf{M} , $[F_1]^{\mathbf{M}} = [F_2]^{\mathbf{M}}$
- propriété : $F_1 \models F_2$ ssi $F_1 \models F_2$ et $F_2 \models F_1$
 - ▶ supposons $F_1 \models F_2$ et $F_2 \models F_1$, montrons $F_1 \models F_2$

Formules logiquement équivalentes

- $F_1 \equiv F_2$ ssi pour toute structure \mathbf{M} , $[F_1]^{\mathbf{M}} = [F_2]^{\mathbf{M}}$
- propriété : $F_1 \equiv F_2$ ssi $F_1 \models F_2$ et $F_2 \models F_1$
 - ▶ supposons $F_1 \models F_2$ et $F_2 \models F_1$, montrons $F_1 \equiv F_2$
soit \mathbf{M} une structure, on raisonne par cas
 - ★ si $[F_1]^{\mathbf{M}} = 0$, on montre par l'absurde que $[F_2]^{\mathbf{M}} = 0$

Formules logiquement équivalentes

- $F_1 \equiv F_2$ ssi pour toute structure \mathbf{M} , $[F_1]^{\mathbf{M}} = [F_2]^{\mathbf{M}}$
- propriété : $F_1 \equiv F_2$ ssi $F_1 \models F_2$ et $F_2 \models F_1$
 - ▶ supposons $F_1 \models F_2$ et $F_2 \models F_1$, montrons $F_1 \equiv F_2$
soit \mathbf{M} une structure, on raisonne par cas
 - ★ si $[F_1]^{\mathbf{M}} = 0$, on montre par l'absurde que $[F_2]^{\mathbf{M}} = 0$
si $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$, alors puisque $F_2 \models F_1$ il vient $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$ ce qui contredit $[F_1]^{\mathbf{M}} = 0$

Formules logiquement équivalentes

- $F_1 \equiv F_2$ ssi pour toute structure \mathbf{M} , $[F_1]^{\mathbf{M}} = [F_2]^{\mathbf{M}}$
- propriété : $F_1 \equiv F_2$ ssi $F_1 \models F_2$ et $F_2 \models F_1$
 - ▶ supposons $F_1 \models F_2$ et $F_2 \models F_1$, montrons $F_1 \equiv F_2$
soit \mathbf{M} une structure, on raisonne par cas
 - ★ si $[F_1]^{\mathbf{M}} = 0$, on montre par l'absurde que $[F_2]^{\mathbf{M}} = 0$
si $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$, alors puisque $F_2 \models F_1$ il vient $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$ ce qui contredit $[F_1]^{\mathbf{M}} = 0$
 - ★ si $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$ alors puisque $F_1 \models F_2$ il vient $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$

Validité/Complétude de la Dédution Naturelle

$$F, F_1, \dots, F_n \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$$

- **Validité** : si F est prouvable à partir des hypothèses F_1, \dots, F_n , alors $\{F_1, \dots, F_n\} \models F$
- **Complétude** : si $\{F_1, \dots, F_n\} \models F$ alors F est prouvable à partir des hypothèses F_1, \dots, F_n