# Règles de la Déduction Naturelle

### Axiome

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h : A$
> montrons $A$
> $\langle i \rangle$ CQFD (Ax avec $h$)

### Axiome

> $\langle j \rangle$ supposons $h'_1 : A'_1, \cdots, h'_k : A'_k, h : A$
> montrons $B$
> $\ldots$
>
> > $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
> > montrons $A$
> > $\langle i \rangle$ CQFD (Ax avec $h$)
>
> $\ldots$
> $\langle j \rangle$ CQFD (Nom)

### Introduction du connecteur $\Rightarrow$

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
> montrons $A \Rightarrow B$
>
> > $\langle i+1 \rangle$ supposons $h : A$
> > montrons $B$
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+1 \rangle$ CQFD
>
> $\langle i \rangle$ CQFD $(I_{\Rightarrow})$

### Introduction du connecteur $\wedge$

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
> montrons $A \wedge B$
>
> > $\langle i+1 \rangle$ montrons $A$
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+1 \rangle$ CQFD
>
> > $\langle i+2 \rangle$ montrons $B$
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+2 \rangle$ CQFD
>
> $\langle i \rangle$ CQFD $(I_{\wedge})$

### Affaiblissement

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h : B$
> montrons $A$
>
> > $\langle i+1 \rangle$ montrons $A$ sans utiliser $h$
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+1 \rangle$ CQFD
>
> $\langle i \rangle$ CQFD (Af)

### Introduction de true

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
> montrons true
> $\langle i \rangle$ CQFD $(I_{\top})$

### Elimination de false

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h :$ false
> montrons $B$
> $\langle i \rangle$ CQFD $(E_{\perp}$ avec $h)$

### Elimination du connecteur $\Rightarrow$

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
> montrons $B$
>
> > $\langle i+1 \rangle$ montrons $A \Rightarrow B$
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+1 \rangle$ CQFD
>
> > $\langle i+2 \rangle$ montrons $A$
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+2 \rangle$ CQFD
>
> $\langle i \rangle$ CQFD $(E_{\Rightarrow})$

### Elimination gauche du connecteur $\wedge$

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
> montrons $A$
>
> > $\langle i+1 \rangle$ montrons $A \wedge B$
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+1 \rangle$ CQFD
>
> $\langle i \rangle$ CQFD $(E^g_{\wedge})$

### Elimination droite du connecteur $\wedge$

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
> montrons $B$
>
> > $\langle i+1 \rangle$ montrons $A \wedge B$
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+1 \rangle$ CQFD
>
> $\langle i \rangle$ CQFD $(E^d_{\wedge})$

**Introduction gauche du connecteur $\vee$**

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $A \vee B$
> $\langle i+1 \rangle$ montrons $A$
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($I^g_\vee$)

**Introduction droite du connecteur $\vee$**

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $A \vee B$
> $\langle i+1 \rangle$ montrons $B$
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($I^d_\vee$)

**Introduction du connecteur $\neg$**

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $\neg A$
> $\langle i+1 \rangle$ supposons $h : A$
> montrons false
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($I_\neg$)

**Elimination du connecteur $\vee$**

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $C$
> $\langle i+1 \rangle$ montrons $A \vee B$
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

> $\langle i+2 \rangle$ supposons $h_A : A$
> montrons $C$
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+2 \rangle$ CQFD

> $\langle i+3 \rangle$ supposons $h_B : B$
> montrons $C$
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+3 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($E_\vee$)

**Elimination du connecteur $\neg$**

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons false
> $\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg A$
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

> $\langle i+2 \rangle$ montrons $A$
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($E_\neg$)

**Introduction du quantificateur $\forall$**

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $\forall x\, A$
> $\langle i+1 \rangle$ soit une nouvelle variable $y$
> ($y \notin \mathrm{Free}(A) \cup \bigcup_{i=1}^n \mathrm{Free}(A_i)$)
> montrons $A[x := y]$
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($I_\forall$)

**Elimination du quantificateur $\forall$**

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $A[x := t]$
> $\langle i+1 \rangle$ montrons $\forall x\, A$
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($E_\forall$)

**Introduction du quantificateur $\exists$**

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $\exists x\, A$
> $\langle i+1 \rangle$ montrons $A[x := t]$
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($I_\exists$)

**Elimination du quantificateur $\exists$**

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $B$
> $\langle i+1 \rangle$ montrons $\exists x\, A$
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

> $\langle i+2 \rangle$ soit une nouvelle variable $y$
> ($y \notin \mathrm{Free}(A) \cup \mathrm{Free}(B) \cup \bigcup_{i=1}^n \mathrm{Free}(A_i)$)
> supposons $h : A[x := y]$
> montrons $B$
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($E_\exists$)

**Raisonnement par l'absurde**

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $A$
> $\langle i+1 \rangle$ supposons $h : \neg A$
> montrons false
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (Abs)

## Règles supplémentaires pour le connecteur $\Leftrightarrow$

**Introduction du connecteur $\Leftrightarrow$**

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
> montrons $A \Leftrightarrow B$
>
> > $\langle i+1 \rangle$ montrons $A \Rightarrow B$
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+1 \rangle$ CQFD
>
> > $\langle i+2 \rangle$ montrons $B \Rightarrow A$
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+2 \rangle$ CQFD
>
> $\langle i \rangle$ CQFD ($I_{\Leftrightarrow}$)

**Elimination gauche du connecteur $\Leftrightarrow$**

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
> montrons $A \Rightarrow B$
>
> > $\langle i+1 \rangle$ montrons $A \Leftrightarrow B$
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+1 \rangle$ CQFD
>
> $\langle i \rangle$ CQFD ($E^g_{\Leftrightarrow}$)

**Elimination droite du connecteur $\Leftrightarrow$**

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
> montrons $B \Rightarrow A$
>
> > $\langle i+1 \rangle$ montrons $A \Leftrightarrow B$
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+1 \rangle$ CQFD
>
> $\langle i \rangle$ CQFD ($E^d_{\Leftrightarrow}$)

## Règles Dérivées

**Elimination gauche directe du connecteur $\wedge$**

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h : A \wedge B$
> montrons $A$
> $\langle i \rangle$ CQFD ($D^g_{\wedge}$ avec $h$)

**Elimination droite directe du connecteur $\wedge$**

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h : A \wedge B$
> montrons $B$
> $\langle i \rangle$ CQFD ($D^d_{\wedge}$ avec $h$)

**Introductions du connecteur $\Rightarrow$**

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : F_1, \cdots, h_m : F_m$
> montrons $A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (\cdots (A_n \Rightarrow A_{n+1}) \cdots))$
>
> > $\langle i+1 \rangle$ supposons $h'_1 : A_1, \cdots, h'_n : A_n$
> > montrons $A_{n+1}$
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+1 \rangle$ CQFD
>
> $\langle i \rangle$ CQFD ($I^n_{\Rightarrow}$)

**Elimination directe du connecteur $\Rightarrow$**

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n,$
> $h'_1 : A \Rightarrow B, h'_2 : A$
> montrons $B$
> $\langle i \rangle$ CQFD ($D_{\Rightarrow}$ avec $h'_1, h'_2$)

**Hypothèses contradictoires**

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h'_1 : A, h'_2 : \neg A$
> montrons $B$
> $\langle i \rangle$ CQFD ($D^1_{\perp}$ avec $h'_1, h'_2$)

**Hypothèses contradictoires**

> $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
> montrons $B$
>
> > $\langle i+1 \rangle$ montrons $A$
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+1 \rangle$ CQFD
>
> > $\langle i+2 \rangle$ montrons $\neg A$
> > $\boxed{\cdots}$
> > $\langle i+2 \rangle$ CQFD
>
> $\langle i \rangle$ CQFD ($D^2_{\perp}$)

**Elimination directe du connecteur $\neg$**

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h'_1 : A, h'_2 : \neg A$
montrons false
$\langle i \rangle$ CQFD ($D_\neg$ avec $h'_1, h'_2$)

**Elimination directe du connecteur $\vee$**

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h : A \vee B$
montrons $C$
 $\langle i+1 \rangle$ supposons $h_A : A$
 montrons $C$
 $\boxed{\cdots}$
 $\langle i+1 \rangle$ CQFD

 $\langle i+2 \rangle$ supposons $h_B : B$
 montrons $C$
 $\boxed{\cdots}$
 $\langle i+2 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$ CQFD ($D_\vee$ avec $h$)

**Elimination directe du quantificateur $\forall$**

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h : \forall x\, A$
montrons $A[x := t]$
$\langle i \rangle$ CQFD ($D_\forall$ avec $h$)

**Elimination directe du quantificateur $\exists$**

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h : \exists x\, A$
montrons $B$
 $\langle i+1 \rangle$ soit une nouvelle variable $y$
 ($y \notin \mathrm{Free}(A) \cup \mathrm{Free}(B) \cup \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Free}(A_i)$)
 supposons $h' : A[x := y]$
 montrons $B$
 $\boxed{\cdots}$
 $\langle i+1 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$ CQFD ($D_\exists$ avec $h$)

**Double négation**

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $A$
 $\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg\neg A$
 $\boxed{\cdots}$
 $\langle i+1 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$ CQFD ($R^1_\neg$)

**Double négation**

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $\neg\neg A$
 $\langle i+1 \rangle$ montrons $A$
 $\boxed{\cdots}$
 $\langle i+1 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$ CQFD ($R^2_\neg$)

**Tiers exclu**

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $A \vee \neg A$
$\langle i \rangle$ CQFD (TE)

**Elimination du tiers exclu**

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $B$
 $\langle i+1 \rangle$ supposons $h'_1 : A$, montrons $B$
 $\boxed{\cdots}$
 $\langle i+1 \rangle$ CQFD

 $\langle i+2 \rangle$ supposons $h'_2 : \neg A$
 montrons $B$
 $\boxed{\cdots}$
 $\langle i+2 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$ CQFD ($D_{TE}$)