Cours 2
Règles de déduction : connecteurs

Logique – Licence Informatique

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
  - ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
  - ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »

    $F_1 \Rightarrow F_2$

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
  - ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »

    $F_1 \Rightarrow F_2$

    « vraie » lorsque :

    F_1 désigne l'énoncé : « *la figure f est un carré* »

    F_2 désigne l'énoncé : « *la figure f a 4 côtés de longueurs égales* »

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
  - ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »

$F_1 \Rightarrow F_2$

« vraie » lorsque :

F_1 désigne l'énoncé : « *la figure f est un carré* »

F_2 désigne l'énoncé : « *la figure f a 4 côtés de longueurs égales* »

« fausse » lorsque :

F_1 désigne l'énoncé : « *la figure f est un triangle* »

F_2 désigne l'énoncé : « *la figure f a 4 côtés de longueurs égales* »

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
  - ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »

    $F_1 \Rightarrow F_2$

    « vraie » lorsque :

    F_1 désigne l'énoncé : « *la figure f est un carré* »
    F_2 désigne l'énoncé : « *la figure f a 4 côtés de longueurs égales* »

    « fausse » lorsque :

    F_1 désigne l'énoncé : « *la figure f est un triangle* »
    F_2 désigne l'énoncé : « *la figure f a 4 côtés de longueurs égales* »

    dépend de l'interprétation des symboles utilisés dans les énoncés :
    formules contingentes

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
  - ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
  - toujours « vraies »

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
  - ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
  - toujours « vraies »

    $(F_1 \wedge (F_1 \Rightarrow F_2)) \Rightarrow F_2$
    « vraie » quels que soient les énoncés désignés par F_1 et F_2

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
  - ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
  - toujours « vraies »

    $(F_1 \wedge (F_1 \Rightarrow F_2)) \Rightarrow F_2$

    « vraie » quels que soient les énoncés désignés par F_1 et F_2

    F_1 désigne l'énoncé : « *il pleut* »
    F_2 désigne l'énoncé : « *je prends mon parapluie* »

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
  - ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
  - toujours « vraies »

    $(F_1 \wedge (F_1 \Rightarrow F_2)) \Rightarrow F_2$

    « vraie » quels que soient les énoncés désignés par F_1 et F_2

    F_1 désigne l'énoncé : « *n est le carré d'un entier relatif* »

    F_2 désigne l'énoncé : « *n est un nombre positif ou nul* »

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
  - ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
  - toujours « vraies »
  - toujours « fausses »

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
  - ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
  - toujours « vraies »
  - toujours « fausses »

$$F \land \neg F$$

Formulles prouvables

- certaines formules logiques sont :
  - ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
  - toujours « vraies »
  - toujours « fausses »

    $$F \wedge \neg F$$

    lorsqu'une formule est toujours fausse sa négation est toujours vraie

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
  - ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
  - toujours « vraies »
  - toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de **systèmes de déduction**

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
  - ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
  - toujours « vraies »
  - toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de **systèmes de déduction**
  - ensemble de règles logiques de raisonnement permettant de **prouver une formule**

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
  - ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
  - toujours « vraies »
  - toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de **systèmes de déduction**
  - ensemble de règles logiques de raisonnement permettant de **prouver une formule**
    - règles qui ne dépendent pas de l'interprétation des formules

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
  - ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
  - toujours « vraies »
  - toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de **systèmes de déduction**
  - ensemble de règles logiques de raisonnement permettant de **prouver une formule**
    - règles qui ne dépendent pas de l'interprétation des formules
    - règles qui définissent l'ensemble des raisonnements acceptés

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
  - ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
  - toujours « vraies »
  - toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de **systèmes de déduction**
  - ensemble de règles logiques de raisonnement permettant de **prouver une formule**
  - un système de déduction permet de caractériser un sous-ensemble des formules logiques : **formules prouvables**

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
  - ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
  - toujours « vraies »
  - toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de **systèmes de déduction**
- il existe plusieurs systèmes de déduction

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
  - ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
  - toujours « vraies »
  - toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de **systèmes de déduction**
- il existe plusieurs systèmes de déduction
  - **Déduction Naturelle** (Gerhard Gentzen, 1934)

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
  - ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
  - toujours « vraies »
  - toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de **systèmes de déduction**
- il existe plusieurs systèmes de déduction
  - **Déduction Naturelle** (Gerhard Gentzen, 1934)
- il existe plusieurs formalismes pour écrire des preuves

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
  - ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
  - toujours « vraies »
  - toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de **systèmes de déduction**
- il existe plusieurs systèmes de déduction
  - **Déduction Naturelle** (Gerhard Gentzen, 1934)
- il existe plusieurs formalismes pour écrire des preuves
  - des emboîtements de boîtes
    - ★ preuves *à la* Lamport – preuves structurées
      How to write a 21st century proof ? (Leslie Lamport, 2011)
    - ★ preuves vérifiables (Isabelle/Isar-HOL)

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
  - ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
  - toujours « vraies »
  - toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de **systèmes de déduction**
- il existe plusieurs systèmes de déduction
  - **Déduction Naturelle** (Gerhard Gentzen, 1934)
- il existe plusieurs formalismes pour écrire des preuves
  - des emboîtements de boîtes
    - ★ preuves *à la* Lamport – preuves structurées
      How to write a 21st century proof ? (Leslie Lamport, 2011)
    - ★ preuves vérifiables (Isabelle/Isar-HOL)
  - il en existe d'autres ... (arbres d'inférence, etc)

Preuve : emboîtement de boîtes

- une étape i d'une preuve (boîte numéro i) :

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : F_1, h_2 : F_2, \cdots, h_n : F_n$
	montrons F
	$\cdots$ preuve de F (séquence de sous-boîtes) $\cdots$
$\langle i \rangle$	CQFD (Nom)

Preuve : emboîtement de boîtes

- une étape i d'une preuve (boîte numéro i) :

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : F_1, h_2 : F_2, \cdots, h_n : F_n$
	montrons F
	$\cdots$ preuve de F (séquence de sous-boîtes) $\cdots$
$\langle i \rangle$	CQFD (Nom)

  - correspond à l'application d'une règle logique

Preuve : emboîtement de boîtes

- une étape i d'une preuve (boîte numéro i) :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \langle i \rangle & \text{supposons } h_1 : F_1, h_2 : F_2, \cdots, h_n : F_n \\ & \text{montrons } F \\ & \quad \cdots \text{preuve de } F \text{ (séquence de sous-boîtes)} \cdots \\ \langle i \rangle & \text{CQFD} \quad \text{(Nom)} \end{array}}$$

  - correspond à l'application d'une règle logique
  - (Nom) : nom de la règle logique utilisée pour montrer que F est prouvable avec les hypothèses $h_1 : F_1, \cdots, h_n : F_n$ de la boîte à partir de la séquence de sous-boîtes donnée

Preuve : emboîtement de boîtes

- une étape i d'une preuve (boîte numéro i) :

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : F_1, h_2 : F_2, \cdots, h_n : F_n$
	montrons F
	$\cdots$ preuve de F (séquence de sous-boîtes) $\cdots$
$\langle i \rangle$	CQFD (Nom)

  - correspond à l'application d'une règle logique
  - (Nom) : nom de la règle logique utilisée pour montrer que F est prouvable avec les hypothèses $h_1 : F_1, \cdots, h_n : F_n$ de la boîte à partir de la séquence de sous-boîtes donnée
  - plusieurs boîtes d'une même preuve peuvent avoir le même numéro, mais toutes les sous-boîtes d'une boîte de numéro i ont un numéro strictement supérieur à i

Preuve : emboîtement de boîtes

- une étape i d'une preuve (boîte numéro i) :

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : F_1, h_2 : F_2, \cdots, h_n : F_n$
	montrons F
	$\cdots$ preuve de F (séquence de sous-boîtes) $\cdots$
$\langle i \rangle$	CQFD (Nom)

  - h_j : label / nom de l'hypothèse

Preuve : emboîtement de boîtes

- une étape i d'une preuve (boîte numéro i) :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \langle i \rangle & \text{supposons } h_1 : F_1, h_2 : F_2, \cdots, h_n : F_n \\ & \text{montrons } F \\ & \quad \cdots \text{preuve de } F \text{ (séquence de sous-boîtes)} \cdots \\ \langle i \rangle & \text{CQFD (Nom)} \end{array}}$$

  - h_j : label / nom de l'hypothèse
  - l'ordre dans lequel apparaissent les hypothèses d'une boîte n'a pas d'importance (ensemble non ordonné d'hypothèses)

Preuve : emboîtement de boîtes

- une étape i d'une preuve (boîte numéro i) :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \langle i \rangle & \text{supposons } h_1 : F_1, h_2 : F_2, \cdots, h_n : F_n \\ & \text{montrons } F \\ & \quad \cdots \text{preuve de } F \text{ (séquence de sous-boîtes)} \cdots \\ \langle i \rangle & \text{CQFD (Nom)} \end{array}}$$

  - h_j : label / nom de l'hypothèse
  - l'ordre dans lequel apparaissent les hypothèses d'une boîte n'a pas d'importance (ensemble non ordonné d'hypothèses)
  - plusieurs hypothèses différentes d'une même preuve peuvent avoir le même nom, mais le nom d'une hypothèse introduite dans une boîte de numéro i ne peut plus être utilisé pour nommer une hypothèse dans toutes les sous-boîtes de la boîte i

Preuve : emboîtement de boîtes

- une étape i d'une preuve (boîte numéro i) :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \langle i \rangle & \text{supposons } h_1 : F_1, h_2 : F_2, \cdots, h_n : F_n \\ & \text{montrons } F \\ & \quad \cdots \text{preuve de } F \text{ (séquence de sous-boîtes)} \cdots \\ \langle i \rangle & \text{CQFD (Nom)} \end{array}}$$

  - h_j : label / nom de l'hypothèse
  - l'ordre dans lequel apparaissent les hypothèses d'une boîte n'a pas d'importance (ensemble non ordonné d'hypothèses)
  - plusieurs hypothèses différentes d'une même preuve peuvent avoir le même nom, mais le nom d'une hypothèse introduite dans une boîte de numéro i ne peut plus être utilisé pour nommer une hypothèse dans toutes les sous-boîtes de la boîte i
  - toutes les hypothèses d'une boîte peuvent être utilisées dans chacune de ses sous-boîtes (sauf mention explicite)

Axiome (Ax)

ce que l'on cherche à prouver est en hypothèse :

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h : A$
	montrons A
$\langle i \rangle$	CQFD (Ax avec h)

Axiome (Ax)

ce que l'on cherche à prouver est en hypothèse :

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h : A$
	montrons A
$\langle i \rangle$	CQFD (Ax avec h)

l'hypothèse $h : A$ peut également être supposée dans une boîte $\langle j \rangle$ dont cette boîte $\langle i \rangle$ est une sous-boîte

$\langle j \rangle$	supposons $h'_1 : A'_1, \cdots, h'_k : A'_k, h : A$		
	montrons B		
	...		
	$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$	
		montrons A	
	$\langle i \rangle$	CQFD (Ax avec h)	
	...		
$\langle j \rangle$	CQFD (Nom)		

Règle d'affaiblissement (Af)

si A est prouvable à partir des hypothèses de $A_1, \cdots, A_n$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$,

$\langle i+1 \rangle$ montrons A

$\boxed{\cdots}$

$\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$

Règle d'affaiblissement (Af)

si A est prouvable à partir des hypothèses de $A_1, \cdots, A_n$ alors A est encore prouvable si on ajoute une hypothèse B

$$\boxed{\begin{array}{ll} \langle i \rangle & \text{supposons } h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h : B \\ & \text{montrons } A \\ & \boxed{\begin{array}{ll} \langle i+1 \rangle & \text{montrons } A \\ & \text{sans utiliser } h \\ & \boxed{\cdots} \\ \langle i+1 \rangle & \text{CQFD} \end{array}} \\ \langle i \rangle & \text{CQFD (Af)} \end{array}}$$

Règle d'affaiblissement (Af)

si A est prouvable à partir des hypothèses de $A_1, \cdots, A_n$ alors A est encore prouvable si on ajoute une hypothèse B

$$\boxed{\begin{array}{ll} \langle i \rangle & \text{supposons } h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h : B \\ & \text{montrons } A \\ & \boxed{\begin{array}{ll} \langle i+1 \rangle & \text{montrons } A \\ & \text{sans utiliser } h \\ & \boxed{\cdots} \\ \langle i+1 \rangle & \text{CQFD} \end{array}} \\ \langle i \rangle & \text{CQFD (Af)} \end{array}}$$

- utile dans certaines situations, par exemple lorsque l'on veut « réutiliser » une preuve existante qui utilise seulement un sous-ensemble des hypothèses disponibles

Règles d'introduction (I) et d'élimination (E)

- pour les constantes true et false :

- pour les connecteurs logiques ($\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ et $\neg$) :

Règles d'introduction (I) et d'élimination (E)

- pour les constantes true et false :
  - règles d'introduction
    - permettent de prouver la formule constante

- pour les connecteurs logiques ($\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ et $\neg$) :
  - règles d'introduction
    - permettent de prouver une formule dont la racine de l'arbre de syntaxe est le connecteur logique considéré

Règles d'introduction (I) et d'élimination (E)

- pour les constantes true et false :
  - règles d'introduction
    - ★ permettent de prouver la formule constante
  - règles d'élimination
    - ★ permettent de prouver une formule en **utilisant une hypothèse** correspondant à la formule constante
- pour les connecteurs logiques ($\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ et $\neg$) :
  - règles d'introduction
    - ★ permettent de prouver une formule dont la racine de l'arbre de syntaxe est le connecteur logique considéré
  - règles d'élimination
    - ★ permettent de prouver une formule en **utilisant une hypothèse** correspondant à une formule dont la racine de l'arbre de syntaxe est le connecteur logique considéré

Constante true

- introduction : permet de prouver la formule true
  - c'est un axiome

$$\boxed{\begin{array}{ll} \langle i \rangle & \text{supposons } h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n \\ & \text{montrons true} \\ \langle i \rangle & \text{CQFD } (I_\top) \end{array}}$$

Constante true

- introduction : permet de prouver la formule true
  - c'est un axiome

$$\begin{array}{|ll|} \hline \langle i \rangle & \text{supposons } h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n \\ & \text{montrons true} \\ \langle i \rangle & \text{CQFD } (I_\top) \\ \hline \end{array}$$

- élimination : permet d'utiliser l'hypothèse h : true
  - pas de règle d'élimination pour true
    - ★ on ne peut rien déduire de l'hypothèse h : true

Constante false

- introduction : permet de prouver la formule false
  - pas de règle d'introduction : la formule false ne doit pas être prouvable (sans hypothèses contradictoires) !

Constante false

- introduction : permet de prouver la formule false
  - pas de règle d'introduction : la formule false ne doit pas être prouvable (sans hypothèses contradictoires) !
- élimination : permet d'utiliser l'hypothèse h : false
  - on peut **tout** déduire de l'hypothèse h : false

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n, h$: false
	montrons B
$\langle i \rangle$	CQFD ($E_\perp$ avec h)

Implication : introduction ($I_{\Rightarrow}$)

- pour prouver $A \Rightarrow B$

$$
\boxed{
\begin{array}{ll}
\langle i \rangle & \text{supposons } h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n \\
& \text{montrons } A \Rightarrow B \\
& \\
& \\
& \\
\langle i \rangle &
\end{array}
}
$$

Implication : introduction ($I_{\Rightarrow}$)

- pour prouver $A \Rightarrow B$ il suffit de supposer A et de prouver B

$$\boxed{\begin{array}{ll}
\langle i \rangle & \text{supposons } h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n \\
& \text{montrons } A \Rightarrow B \\
& \boxed{\begin{array}{ll}
\langle i+1 \rangle & \text{supposons } h : A \\
& \text{montrons } B \\
& \boxed{\cdots} \\
\langle i+1 \rangle & \text{CQFD}
\end{array}} \\
\langle i \rangle & \text{CQFD } (I_{\Rightarrow})
\end{array}}$$

Implication : introduction ($I_\Rightarrow$)

- pour prouver $A \Rightarrow B$ il suffit de supposer A et de prouver B

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
	montrons $A \Rightarrow B$
	$\langle i+1 \rangle$ supposons $h : A$
	montrons B
	$\boxed{\cdots}$
	$\langle i+1 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD ($I_\Rightarrow$)

  - les formules A et B de la boîte $\langle i+1 \rangle$ sont des sous-formules de la formule $A \Rightarrow B$ de la boîte $\langle i \rangle$
    - une fois que l'on a choisi d'appliquer cette règle, le contenu de la boîte $\langle i+1 \rangle$ est complètement déterminé par le contenu de la boîte $\langle i \rangle$

Implication : élimination ($E_{\Rightarrow}$)

- *Modus-Ponens* : si à partir des hypothèses $A_1, \cdots, A_n$ on peut prouver $A \Rightarrow B$ et A

$$
\boxed{
\begin{array}{ll}
\langle i \rangle & \text{supposons } h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n \\
& \boxed{\begin{array}{ll} \langle i+1 \rangle & \text{montrons } A \Rightarrow B \\ & \boxed{\cdots} \\ \langle i+1 \rangle & \text{CQFD} \end{array}} \\
& \boxed{\begin{array}{ll} \langle i+2 \rangle & \text{montrons } A \\ & \boxed{\cdots} \\ \langle i+2 \rangle & \text{CQFD} \end{array}} \\
\langle i \rangle &
\end{array}
}
$$

Implication : élimination ($E_{\Rightarrow}$)

- *Modus-Ponens* : si à partir des hypothèses $A_1, \cdots, A_n$ on peut prouver $A \Rightarrow B$ et A alors la formule B est prouvable

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons B

$\langle i+1 \rangle$ montrons $A \Rightarrow B$
$\boxed{\cdots}$
$\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i+2 \rangle$ montrons A
$\boxed{\cdots}$
$\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($E_{\Rightarrow}$)

Implication : élimination ($E_{\Rightarrow}$)

- *Modus-Ponens* : si à partir des hypothèses $A_1, \cdots, A_n$ on peut prouver $A \Rightarrow B$ et A alors la formule B est prouvable

$$
\boxed{
\begin{array}{ll}
\langle i \rangle & \text{supposons } h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n \\
 & \text{montrons } B \\
 & \boxed{\begin{array}{ll}
 \langle i+1 \rangle & \text{montrons } A \Rightarrow B \\
 & \boxed{\cdots} \\
 \langle i+1 \rangle & \text{CQFD}
 \end{array}} \\
 & \\
 & \boxed{\begin{array}{ll}
 \langle i+2 \rangle & \text{montrons } A \\
 & \boxed{\cdots} \\
 \langle i+2 \rangle & \text{CQFD}
 \end{array}} \\
\langle i \rangle & \text{CQFD } (E_{\Rightarrow})
\end{array}
}
$$

  - la formule A des boîtes $\langle i+1 \rangle$ et $\langle i+2 \rangle$ n'est pas une sous-formule de la formule B de la boîte $\langle i \rangle$
    - ★ appliquer cette règle nécessite de choisir/trouver une formule A telle que les formules A et $A \Rightarrow B$ soient prouvables

Conjonction : introduction ($I_\wedge$)

- pour prouver $A \wedge B$

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
	montrons $A \wedge B$
$\langle i \rangle$	

Conjonction : introduction ($I_\wedge$)

- pour prouver $A \wedge B$ il suffit de prouver A et de prouver B

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
	montrons $A \wedge B$
	$\langle i+1 \rangle$ montrons A
	$\boxed{\cdots}$
	$\langle i+1 \rangle$ CQFD
	$\langle i+2 \rangle$ montrons B
	$\boxed{\cdots}$
	$\langle i+2 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD ($I_\wedge$)

Conjonction : introduction ($I_\wedge$)

- pour prouver $A \wedge B$ il suffit de prouver A et de prouver B

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons $A \wedge B$

$\langle i+1 \rangle$ montrons A

$\boxed{\cdots}$

$\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i+2 \rangle$ montrons B

$\boxed{\cdots}$

$\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($I_\wedge$)

- les formules A et B des boîtes $\langle i+1 \rangle$ et $\langle i+2 \rangle$ sont des sous-formules de la formule $A \wedge B$ de la boîte $\langle i \rangle$
  - une fois que l'on a choisi d'appliquer cette règle, le contenu des boîtes $\langle i+1 \rangle$ et $\langle i+2 \rangle$ est complètement déterminé par le contenu de la boîte $\langle i \rangle$

Conjonction : élimination ($E^g_\wedge$) ($E^d_\wedge$)

- si l'on dispose d'une preuve de $A \wedge B$

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$		
	$\langle i+1 \rangle$	montrons $A \wedge B$	
		$\boxed{\cdots}$	
	$\langle i+1 \rangle$	CQFD	
$\langle i \rangle$			

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$		
	$\langle i+1 \rangle$	montrons $A \wedge B$	
		$\boxed{\cdots}$	
	$\langle i+1 \rangle$	CQFD	
$\langle i \rangle$			

Conjonction : élimination ($E^g_\wedge$) ($E^d_\wedge$)

- si l'on dispose d'une preuve de $A \wedge B$ alors la formule A est prouvable

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$ montrons A $\langle i+1 \rangle$ montrons $A \wedge B$ $\boxed{\cdots}$ $\langle i+1 \rangle$ CQFD $\langle i \rangle$ CQFD ($E^g_\wedge$)	$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$ $\langle i+1 \rangle$ montrons $A \wedge B$ $\boxed{\cdots}$ $\langle i+1 \rangle$ CQFD $\langle i \rangle$

Conjonction : élimination ($E^g_\wedge$) ($E^d_\wedge$)

- si l'on dispose d'une preuve de $A \wedge B$ alors la formule A est prouvable et la formule B est prouvable

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$	$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons A	montrons B
$\langle i+1 \rangle$ montrons $A \wedge B$	$\langle i+1 \rangle$ montrons $A \wedge B$
$\boxed{\cdots}$	$\boxed{\cdots}$
$\langle i+1 \rangle$ CQFD	$\langle i+1 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$ CQFD ($E^g_\wedge$)	$\langle i \rangle$ CQFD ($E^d_\wedge$)

Conjonction : élimination ($E_\wedge^g$) ($E_\wedge^d$)

- si l'on dispose d'une preuve de $A \wedge B$ alors la formule A est prouvable et la formule B est prouvable

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$ montrons A $\quad\langle i+1 \rangle$ montrons $A \wedge B$ $\quad\quad \boxed{\cdots}$ $\quad\langle i+1 \rangle$ CQFD $\langle i \rangle$ CQFD ($E_\wedge^g$)	$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$ montrons B $\quad\langle i+1 \rangle$ montrons $A \wedge B$ $\quad\quad \boxed{\cdots}$ $\quad\langle i+1 \rangle$ CQFD $\langle i \rangle$ CQFD ($E_\wedge^d$)

  - ($E_\wedge^g$) : la sous-formule B de la boîte $\langle i+1 \rangle$ n'est pas une sous-formule de la formule A de la boîte $\langle i \rangle$

Conjonction : élimination ($E^g_\wedge$) ($E^d_\wedge$)

- si l'on dispose d'une preuve de $A \wedge B$ alors la formule A est prouvable et la formule B est prouvable

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$ montrons A $\boxed{\begin{array}{ll} \langle i+1 \rangle & \text{montrons } A \wedge B \\ & \boxed{\cdots} \\ \langle i+1 \rangle & \text{CQFD} \end{array}}$ $\langle i \rangle$ CQFD ($E^g_\wedge$)	$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$ montrons B $\boxed{\begin{array}{ll} \langle i+1 \rangle & \text{montrons } A \wedge B \\ & \boxed{\cdots} \\ \langle i+1 \rangle & \text{CQFD} \end{array}}$ $\langle i \rangle$ CQFD ($E^d_\wedge$)

  - ($E^g_\wedge$) : la sous-formule B de la boîte $\langle i+1 \rangle$ n'est pas une sous-formule de la formule A de la boîte $\langle i \rangle$
  - ($E^d_\wedge$) : la sous-formule A de la boîte $\langle i+1 \rangle$ n'est pas une sous-formule de la formule B de la boîte $\langle i \rangle$

Conjonction : élimination ($E_\wedge^g$) ($E_\wedge^d$)

- si l'on dispose d'une preuve de $A \wedge B$ alors la formule A est prouvable et la formule B est prouvable

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$ montrons A $\langle i+1 \rangle$ montrons $A \wedge B$ $\boxed{\cdots}$ $\langle i+1 \rangle$ CQFD $\langle i \rangle$ CQFD ($E_\wedge^g$)	$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$ montrons B $\langle i+1 \rangle$ montrons $A \wedge B$ $\boxed{\cdots}$ $\langle i+1 \rangle$ CQFD $\langle i \rangle$ CQFD ($E_\wedge^d$)

  - ($E_\wedge^g$) : la sous-formule B de la boîte $\langle i+1 \rangle$ n'est pas une sous-formule de la formule A de la boîte $\langle i \rangle$
  - ($E_\wedge^d$) : la sous-formule A de la boîte $\langle i+1 \rangle$ n'est pas une sous-formule de la formule B de la boîte $\langle i \rangle$
    - appliquer cette règle nécessite de choisir/trouver une formule A ou une formule B telle que $A \wedge B$ soit prouvable
    - la formule $A \wedge B$ peut être une hypothèse

Disjonction : introduction ($I_\vee^g$) ($I_\vee^d$)

- pour prouver $A \vee B$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$ montrons $A \vee B$ $\langle i \rangle$	$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$ montrons $A \vee B$ $\langle i \rangle$

Disjonction : introduction ($I_\vee^g$) ($I_\vee^d$)

- pour prouver $A \vee B$ il suffit de prouver A

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
	montrons $A \vee B$
	$\langle i+1 \rangle$ montrons A
	$\boxed{\cdots}$
	$\langle i+1 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD ($I_\vee^g$)

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
	montrons $A \vee B$
$\langle i \rangle$	

Disjonction : introduction ($I_\vee^g$) ($I_\vee^d$)

- pour prouver $A \vee B$ il suffit de prouver A ou bien de prouver B

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
	montrons $A \vee B$
	$\langle i+1 \rangle$ montrons A
	$\boxed{\cdots}$
	$\langle i+1 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD ($I_\vee^g$)

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
	montrons $A \vee B$
	$\langle i+1 \rangle$ montrons B
	$\boxed{\cdots}$
	$\langle i+1 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD ($I_\vee^d$)

Disjonction : introduction ($I_\vee^g$) ($I_\vee^d$)

- pour prouver $A \vee B$ il suffit de prouver A ou bien de prouver B

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$ montrons $A \vee B$	$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$ montrons $A \vee B$
	$\langle i+1 \rangle$ montrons A		$\langle i+1 \rangle$ montrons B
	$\boxed{\cdots}$		$\boxed{\cdots}$
	$\langle i+1 \rangle$ CQFD		$\langle i+1 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD ($I_\vee^g$)	$\langle i \rangle$	CQFD ($I_\vee^d$)

  - ($I_\vee^g$) : la formule A de la boîte $\langle i+1 \rangle$ est une sous-formule de la formule $A \vee B$ de la boîte $\langle i \rangle$

Disjonction : introduction ($I_\vee^g$) ($I_\vee^d$)

- pour prouver $A \vee B$ il suffit de prouver A ou bien de prouver B

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$		
	montrons $A \vee B$		
	$\langle i+1 \rangle$	montrons A	
		$\boxed{\cdots}$	
	$\langle i+1 \rangle$	CQFD	
$\langle i \rangle$	CQFD ($I_\vee^g$)		

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$		
	montrons $A \vee B$		
	$\langle i+1 \rangle$	montrons B	
		$\boxed{\cdots}$	
	$\langle i+1 \rangle$	CQFD	
$\langle i \rangle$	CQFD ($I_\vee^d$)		

  - ($I_\vee^g$) : la formule A de la boîte $\langle i+1 \rangle$ est une sous-formule de la formule $A \vee B$ de la boîte $\langle i \rangle$
  - ($I_\vee^g$) : la formule B de la boîte $\langle i+1 \rangle$ est une sous-formule de la formule $A \vee B$ de la boîte $\langle i \rangle$

Disjonction : introduction ($I_\vee^g$) ($I_\vee^d$)

- pour prouver $A \vee B$ il suffit de prouver A ou bien de prouver B

$$\boxed{\begin{array}{ll} \langle i \rangle & \text{supposons } h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n \\ & \text{montrons } A \vee B \\ & \boxed{\begin{array}{ll} \langle i+1 \rangle & \text{montrons } A \\ & \boxed{\cdots} \\ \langle i+1 \rangle & \text{CQFD} \end{array}} \\ \langle i \rangle & \text{CQFD } (I_\vee^g) \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ll} \langle i \rangle & \text{supposons } h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n \\ & \text{montrons } A \vee B \\ & \boxed{\begin{array}{ll} \langle i+1 \rangle & \text{montrons } B \\ & \boxed{\cdots} \\ \langle i+1 \rangle & \text{CQFD} \end{array}} \\ \langle i \rangle & \text{CQFD } (I_\vee^d) \end{array}}$$

  - ($I_\vee^g$) : la formule A de la boîte $\langle i+1 \rangle$ est une sous-formule de la formule $A \vee B$ de la boîte $\langle i \rangle$
  - ($I_\vee^g$) : la formule B de la boîte $\langle i+1 \rangle$ est une sous-formule de la formule $A \vee B$ de la boîte $\langle i \rangle$
    - ★ une fois que l'on a choisi d'appliquer cette règle, le contenu de la boîte $\langle i+1 \rangle$ est complètement déterminé par le contenu de la boîte $\langle i \rangle$

Disjonction : élimination ($E_\vee$)

- **raisonnement par cas**

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$

$\langle i \rangle$

Disjonction : élimination ($E_\vee$)

- **raisonnement par cas** : si à partir de l'hypothèse A on sait prouver C

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$

$\langle i+2 \rangle$ supposons $h_A : A$

montrons C

$\boxed{\cdots}$

$\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$

Disjonction : élimination ($E_\vee$)

- **raisonnement par cas** : si à partir de l'hypothèse A on sait prouver C et si à partir de l'hypothèse B on sait prouver C

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
$\langle i+2 \rangle$	supposons $h_A : A$
	montrons C
	$\boxed{\cdots}$
$\langle i+2 \rangle$	CQFD
$\langle i+3 \rangle$	supposons $h_B : B$
	montrons C
	$\boxed{\cdots}$
$\langle i+3 \rangle$	CQFD
$\langle i \rangle$	

Disjonction : élimination ($E_\vee$)

- **raisonnement par cas** : si à partir de l'hypothèse A on sait prouver C et si à partir de l'hypothèse B on sait prouver C et si on sait prouver $A \vee B$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$

> $\langle i+1 \rangle$ montrons $A \vee B$
>
> $\boxed{\cdots}$
>
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

> $\langle i+2 \rangle$ supposons $h_A : A$
> montrons C
>
> $\boxed{\cdots}$
>
> $\langle i+2 \rangle$ CQFD

> $\langle i+3 \rangle$ supposons $h_B : B$
> montrons C
>
> $\boxed{\cdots}$
>
> $\langle i+3 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$

Disjonction : élimination ($E_\vee$)

- **raisonnement par cas** : si à partir de l'hypothèse A on sait prouver C et si à partir de l'hypothèse B on sait prouver C et si on sait prouver $A \vee B$ alors C est prouvable

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons C

$\langle i+1 \rangle$ montrons $A \vee B$
$\boxed{\cdots}$
$\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i+2 \rangle$ supposons $h_A : A$
montrons C
$\boxed{\cdots}$
$\langle i+2 \rangle$ CQFD

$\langle i+3 \rangle$ supposons $h_B : B$
montrons C
$\boxed{\cdots}$
$\langle i+3 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($E_\vee$)

Disjonction : élimination ($E_\vee$)

- **raisonnement par cas** : si à partir de l'hypothèse A on sait prouver C et si à partir de l'hypothèse B on sait prouver C et si on sait prouver $A \vee B$ alors C est prouvable
  - les formules A et B des boîtes $\langle i+1 \rangle$, $\langle i+2 \rangle$ et $\langle i+3 \rangle$ n'apparaissent pas dans la boîte $\langle i \rangle$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons C

> $\langle i+1 \rangle$ montrons $A \vee B$
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

> $\langle i+2 \rangle$ supposons $h_A : A$
> montrons C
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+2 \rangle$ CQFD

> $\langle i+3 \rangle$ supposons $h_B : B$
> montrons C
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+3 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($E_\vee$)

Disjonction : élimination ($E_\vee$)

- **raisonnement par cas** : si à partir de l'hypothèse A on sait prouver C et si à partir de l'hypothèse B on sait prouver C et si on sait prouver $A \vee B$ alors C est prouvable
  - les formules A et B des boîtes $\langle i+1 \rangle$, $\langle i+2 \rangle$ et $\langle i+3 \rangle$ n'apparaissent pas dans la boîte $\langle i \rangle$
    - appliquer cette règle nécessite de trouver deux formules A et B telles que $A \vee B$ soit prouvable et telles que C soit prouvable à partir de A et soit aussi prouvable à partir de B

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons C

> $\langle i+1 \rangle$ montrons $A \vee B$
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+1 \rangle$ CQFD

> $\langle i+2 \rangle$ supposons $h_A : A$
> montrons C
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+2 \rangle$ CQFD

> $\langle i+3 \rangle$ supposons $h_B : B$
> montrons C
> $\boxed{\cdots}$
> $\langle i+3 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD ($E_\vee$)

Négation : introduction ($I_\neg$)

- pour prouver $\neg A$

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
	montrons $\neg A$
$\langle i \rangle$	

Négation : introduction ($I_\neg$)

- pour prouver $\neg A$ il suffit de supposer A et de prouver false

$$
\boxed{
\begin{array}{ll}
\langle i \rangle & \text{supposons } h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n \\
 & \text{montrons } \neg A \\
 & \boxed{\begin{array}{ll}
 \langle i+1 \rangle & \text{supposons } h : A \\
 & \text{montrons false} \\
 & \boxed{\cdots} \\
 \langle i+1 \rangle & \text{CQFD}
 \end{array}} \\
\langle i \rangle & \text{CQFD } (I_\neg)
\end{array}
}
$$

Négation : introduction ($I_\neg$)

- pour prouver $\neg A$ il suffit de supposer A et de prouver false

$$\boxed{\begin{array}{ll} \langle i \rangle & \text{supposons } h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n \\ & \text{montrons } \neg A \\ & \boxed{\begin{array}{ll} \langle i+1 \rangle & \text{supposons } h : A \\ & \text{montrons false} \\ & \boxed{\cdots} \\ \langle i+1 \rangle & \text{CQFD} \end{array}} \\ \langle i \rangle & \text{CQFD } (I_\neg) \end{array}}$$

  - forme particulière d'un raisonnement par l'absurde (utilisable uniquement pour prouver la négation d'une formule)

Négation : introduction ($I_\neg$)

- pour prouver $\neg A$ il suffit de supposer A et de prouver false

$$\boxed{\begin{array}{ll} \langle i \rangle & \text{supposons } h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n \\ & \text{montrons } \neg A \\ & \boxed{\begin{array}{ll} \langle i+1 \rangle & \text{supposons } h : A \\ & \text{montrons false} \\ & \boxed{\cdots} \\ \langle i+1 \rangle & \text{CQFD} \end{array}} \\ \langle i \rangle & \text{CQFD } (I_\neg) \end{array}}$$

  - forme particulière d'un raisonnement par l'absurde (utilisable uniquement pour prouver la négation d'une formule)
  - revient à voir une preuve de $\neg A$ comme une preuve de $A \Rightarrow$ false

Négation : introduction ($I_\neg$)

- pour prouver $\neg A$ il suffit de supposer A et de prouver false

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
	montrons $\neg A$
	$\langle i+1 \rangle$ supposons $h : A$
	montrons false
	$\boxed{\cdots}$
	$\langle i+1 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD ($I_\neg$)

  - forme particulière d'un raisonnement par l'absurde (utilisable uniquement pour prouver la négation d'une formule)
  - revient à voir une preuve de $\neg A$ comme une preuve de $A \Rightarrow$ false
  - la formule A de la boîte $\langle i+1 \rangle$ est une sous-formule de la formule $\neg A$ de la boîte $\langle i \rangle$

Négation : introduction ($I_\neg$)

- pour prouver $\neg A$ il suffit de supposer A et de prouver false

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
	montrons $\neg A$
	$\langle i+1 \rangle$ supposons $h : A$
	montrons false
	$\boxed{\cdots}$
	$\langle i+1 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD ($I_\neg$)

  - forme particulière d'un raisonnement par l'absurde (utilisable uniquement pour prouver la négation d'une formule)
  - revient à voir une preuve de $\neg A$ comme une preuve de $A \Rightarrow$ false
  - la formule A de la boîte $\langle i+1 \rangle$ est une sous-formule de la formule $\neg A$ de la boîte $\langle i \rangle$
    - ★ une fois que l'on a choisi d'appliquer cette règle, le contenu de la boîte $\langle i+1 \rangle$ est complètement déterminé par le contenu de la boîte $\langle i \rangle$

Négation : élimination ($E_\neg$)

- si on sait prouver une formule $\neg A$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \langle i \rangle & \text{supposons } h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n \\ & \boxed{\begin{array}{ll} \langle i+1 \rangle & \text{montrons } \neg A \\ & \boxed{\cdots} \\ \langle i+1 \rangle & \text{CQFD} \end{array}} \\ & \\ \langle i \rangle & \end{array}}$$

Négation : élimination ($E_\neg$)

- si on sait prouver une formule $\neg A$ et si on sait aussi prouver A

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
$\langle i+1 \rangle$	montrons $\neg A$
	$\boxed{\cdots}$
$\langle i+1 \rangle$	CQFD
$\langle i+2 \rangle$	montrons A
	$\boxed{\cdots}$
$\langle i+2 \rangle$	CQFD
$\langle i \rangle$	

Négation : élimination ($E_\neg$)

- si on sait prouver une formule $\neg A$ et si on sait aussi prouver A alors false est prouvable

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
	montrons false
	$\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg A$
	$\boxed{\cdots}$
	$\langle i+1 \rangle$ CQFD
	$\langle i+2 \rangle$ montrons A
	$\boxed{\cdots}$
	$\langle i+2 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD ($E_\neg$)

Négation : élimination ($E_\neg$)

- si on sait prouver une formule $\neg A$ et si on sait aussi prouver A alors false est prouvable

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
  montrons false
    $\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg A$
      $\cdots$
    $\langle i+1 \rangle$ CQFD

    $\langle i+2 \rangle$ montrons A
      $\cdots$
    $\langle i+2 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$ CQFD ($E_\neg$)

  - la formule A qui apparaît dans les boîtes $\langle i+1 \rangle$ et $\langle i+2 \rangle$ n'apparaît pas dans la boîte $\langle i \rangle$

Négation : élimination ($E_\neg$)

- si on sait prouver une formule $\neg A$ et si on sait aussi prouver A alors false est prouvable

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons false
$\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg A$
$\boxed{\cdots}$
$\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i+2 \rangle$ montrons A
$\boxed{\cdots}$
$\langle i+2 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$ CQFD ($E_\neg$)

  - la formule A qui apparaît dans les boîtes $\langle i+1 \rangle$ et $\langle i+2 \rangle$ n'apparaît pas dans la boîte $\langle i \rangle$
    - appliquer cette règle nécessite de choisir/trouver une formule A telle que A soit prouvable et $\neg A$ soit aussi prouvable

Exemple

$\langle 1 \rangle$ montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

$\langle 1 \rangle$

Exemple

$\langle 1 \rangle$ montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

$\langle 2 \rangle$ supposons $h_1 : \neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$

$\langle 2 \rangle$

$\langle 1 \rangle$ CQFD $(I_\Rightarrow)$

Exemple

$\langle 1 \rangle$ montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

$\langle 2 \rangle$ supposons $h_1 : \neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$

$\langle 3 \rangle$ montrons $\neg A$

$\langle 3 \rangle$

$\langle 4 \rangle$ montrons $\neg B$

$\langle 4 \rangle$

$\langle 2 \rangle$ CQFD $(I_{\wedge})$

$\langle 1 \rangle$ CQFD $(I_{\Rightarrow})$

Exemple

⟨1⟩ montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

⟨2⟩ supposons $h_1 : \neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$

⟨3⟩ montrons $\neg A$

⟨4⟩ supposons $h_2 : A$, montrons false

⟨4⟩

⟨3⟩ CQFD $(I_\neg)$

⟨4⟩ montrons $\neg B$

⟨4⟩

⟨2⟩ CQFD $(I_\wedge)$

⟨1⟩ CQFD $(I_\Rightarrow)$

Exemple

⟨1⟩ montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

⟨2⟩ supposons $h_1 : \neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$

⟨3⟩ montrons $\neg A$

⟨4⟩ supposons $h_2 : A$, montrons false

⟨5⟩ montrons $\neg(A \vee B)$

⟨5⟩

⟨6⟩ montrons $A \vee B$

⟨6⟩

⟨4⟩ CQFD $(E_\neg)$

⟨3⟩ CQFD $(I_\neg)$

⟨4⟩ montrons $\neg B$

⟨4⟩

⟨2⟩ CQFD $(I_\wedge)$

⟨1⟩ CQFD $(I_\Rightarrow)$

Exemple

⟨1⟩ montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

⟨2⟩ supposons h_1 : $\neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$

⟨3⟩ montrons $\neg A$

⟨4⟩ supposons h_2 : A, montrons false

⟨5⟩ montrons $\neg(A \vee B)$

⟨5⟩ CQFD (Ax avec h_1)

⟨6⟩ montrons $A \vee B$

⟨6⟩

⟨4⟩ CQFD $(E_\neg)$

⟨3⟩ CQFD $(I_\neg)$

⟨4⟩ montrons $\neg B$

⟨4⟩

⟨2⟩ CQFD $(I_\wedge)$

⟨1⟩ CQFD $(I_\Rightarrow)$

Exemple

⟨1⟩ montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

⟨2⟩ supposons h_1 : $\neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$

⟨3⟩ montrons $\neg A$

⟨4⟩ supposons h_2 : A, montrons false

⟨5⟩ montrons $\neg(A \vee B)$

⟨5⟩ CQFD (Ax avec h_1)

⟨6⟩ montrons $A \vee B$

⟨7⟩ montrons A

⟨7⟩

⟨6⟩ CQFD ($I_{\vee}^{g}$)

⟨4⟩ CQFD ($E_{\neg}$)

⟨3⟩ CQFD ($I_{\neg}$)

⟨4⟩ montrons $\neg B$

⟨4⟩

⟨2⟩ CQFD ($I_{\wedge}$)

⟨1⟩ CQFD ($I_{\Rightarrow}$)

Exemple

⟨1⟩ montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

⟨2⟩ supposons $h_1 : \neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$

⟨3⟩ montrons $\neg A$

⟨4⟩ supposons $h_2 : A$, montrons false

⟨5⟩ montrons $\neg(A \vee B)$

⟨5⟩ CQFD (Ax avec h_1)

⟨6⟩ montrons $A \vee B$

⟨7⟩ montrons A

⟨7⟩ CQFD (Ax avec h_2)

⟨6⟩ CQFD ($I^g_\vee$)

⟨4⟩ CQFD ($E_\neg$)

⟨3⟩ CQFD ($I_\neg$)

⟨4⟩ montrons $\neg B$

⟨4⟩

⟨2⟩ CQFD ($I_\wedge$)

⟨1⟩ CQFD ($I_\Rightarrow$)

Exemple

- $\langle 1 \rangle$ montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
  - $\langle 2 \rangle$ supposons $h_1 : \neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$
    - $\langle 3 \rangle$ montrons $\neg A$
      - $\langle 4 \rangle$ supposons $h_2 : A$, montrons false
        - $\langle 5 \rangle$ montrons $\neg(A \vee B)$
        - $\langle 5 \rangle$ CQFD (Ax avec h_1)
        - $\langle 6 \rangle$ montrons $A \vee B$
          - $\langle 7 \rangle$ montrons A
          - $\langle 7 \rangle$ CQFD (Ax avec h_2)
        - $\langle 6 \rangle$ CQFD ($I_\vee^g$)
      - $\langle 4 \rangle$ CQFD ($E_\neg$)
    - $\langle 3 \rangle$ CQFD ($I_\neg$)
    - $\langle 4 \rangle$ montrons $\neg B$
      - $\langle 5 \rangle$ supposons $h_3 : B$, montrons false
      - $\langle 5 \rangle$
    - $\langle 4 \rangle$ CQFD ($I_\neg$)
  - $\langle 2 \rangle$ CQFD ($I_\wedge$)
- $\langle 1 \rangle$ CQFD ($I_\Rightarrow$)

Exemple

⟨1⟩ montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
⟨2⟩ supposons $h_1 : \neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$
⟨3⟩ montrons $\neg A$
⟨4⟩ supposons $h_2 : A$, montrons false
⟨5⟩ montrons $\neg(A \vee B)$
⟨5⟩ CQFD (Ax avec h_1)
⟨6⟩ montrons $A \vee B$
⟨7⟩ montrons A
⟨7⟩ CQFD (Ax avec h_2)
⟨6⟩ CQFD ($I_\vee^g$)
⟨4⟩ CQFD ($E_\neg$)
⟨3⟩ CQFD ($I_\neg$)
⟨4⟩ montrons $\neg B$
⟨5⟩ supposons $h_3 : B$, montrons false
⟨6⟩ montrons $\neg(A \vee B)$
⟨6⟩
⟨7⟩ montrons $A \vee B$
⟨7⟩
⟨5⟩ CQFD ($E_\neg$)
⟨4⟩ CQFD ($I_\neg$)
⟨2⟩ CQFD ($I_\wedge$)
⟨1⟩ CQFD ($I_\Rightarrow$)

Exemple

$\langle 1\rangle$ montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
  $\langle 2\rangle$ supposons h_1 : $\neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$
    $\langle 3\rangle$ montrons $\neg A$
      $\langle 4\rangle$ supposons h_2 : A, montrons false
        $\langle 5\rangle$ montrons $\neg(A \vee B)$
        $\langle 5\rangle$ CQFD (Ax avec h_1)
        $\langle 6\rangle$ montrons $A \vee B$
          $\langle 7\rangle$ montrons A
          $\langle 7\rangle$ CQFD (Ax avec h_2)
        $\langle 6\rangle$ CQFD ($I_{\vee}^{g}$)
      $\langle 4\rangle$ CQFD ($E_{\neg}$)
    $\langle 3\rangle$ CQFD ($I_{\neg}$)
    $\langle 4\rangle$ montrons $\neg B$
      $\langle 5\rangle$ supposons h_3 : B, montrons false
        $\langle 6\rangle$ montrons $\neg(A \vee B)$
        $\langle 6\rangle$ CQFD (Ax avec h_1)
        $\langle 7\rangle$ montrons $A \vee B$
        $\langle 7\rangle$
      $\langle 5\rangle$ CQFD ($E_{\neg}$)
    $\langle 4\rangle$ CQFD ($I_{\neg}$)
  $\langle 2\rangle$ CQFD ($I_{\wedge}$)
$\langle 1\rangle$ CQFD ($I_{\Rightarrow}$)

Exemple

⟨1⟩ montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
⟨2⟩ supposons h_1 : $\neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$
⟨3⟩ montrons $\neg A$
⟨4⟩ supposons h_2 : A, montrons false
⟨5⟩ montrons $\neg(A \vee B)$
⟨5⟩ CQFD (Ax avec h_1)
⟨6⟩ montrons $A \vee B$
⟨7⟩ montrons A
⟨7⟩ CQFD (Ax avec h_2)
⟨6⟩ CQFD ($I_\vee^g$)
⟨4⟩ CQFD ($E_\neg$)
⟨3⟩ CQFD ($I_\neg$)
⟨4⟩ montrons $\neg B$
⟨5⟩ supposons h_3 : B, montrons false
⟨6⟩ montrons $\neg(A \vee B)$
⟨6⟩ CQFD (Ax avec h_1)
⟨7⟩ montrons $A \vee B$
⟨8⟩ montrons B
⟨8⟩
⟨7⟩ CQFD ($I_\vee^d$)
⟨5⟩ CQFD ($E_\neg$)
⟨4⟩ CQFD ($I_\neg$)
⟨2⟩ CQFD ($I_\wedge$)
⟨1⟩ CQFD ($I_\Rightarrow$)

Exemple

- ⟨1⟩ montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
  - ⟨2⟩ supposons h_1 : $\neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$
    - ⟨3⟩ montrons $\neg A$
      - ⟨4⟩ supposons h_2 : A, montrons false
        - ⟨5⟩ montrons $\neg(A \vee B)$
        - ⟨5⟩ CQFD (Ax avec h_1)
        - ⟨6⟩ montrons $A \vee B$
          - ⟨7⟩ montrons A
          - ⟨7⟩ CQFD (Ax avec h_2)
        - ⟨6⟩ CQFD ($I_\vee^g$)
      - ⟨4⟩ CQFD ($E_\neg$)
    - ⟨3⟩ CQFD ($I_\neg$)
    - ⟨4⟩ montrons $\neg B$
      - ⟨5⟩ supposons h_3 : B, montrons false
        - ⟨6⟩ montrons $\neg(A \vee B)$
        - ⟨6⟩ CQFD (Ax avec h_1)
        - ⟨7⟩ montrons $A \vee B$
          - ⟨8⟩ montrons B
          - ⟨8⟩ CQFD (Ax avec h_3)
        - ⟨7⟩ CQFD ($I_\vee^d$)
      - ⟨5⟩ CQFD ($E_\neg$)
    - ⟨4⟩ CQFD ($I_\neg$)
  - ⟨2⟩ CQFD ($I_\wedge$)
- ⟨1⟩ CQFD ($I_\Rightarrow$)

Logique intuitionniste – Logique classique

- pour le moment :
  - prouver $A \vee B$ consiste à prouver A ou à prouver B

Logique intuitionniste – Logique classique

- pour le moment :
  - prouver $A \vee B$ consiste à prouver A ou à prouver B
    - on ne sait pas prouver le tiers exclu $A \vee \neg A$

Logique intuitionniste – Logique classique

- pour le moment :
  - prouver $A \vee B$ consiste à prouver A ou à prouver B
    - on ne sait pas prouver le tiers exclu $A \vee \neg A$
  - si l'on sait prouver A, alors on sait prouver $\neg\neg A$
    - mais on ne sait pas prouver A à partir de la preuve de $\neg\neg A$

Logique intuitionniste – Logique classique

- pour le moment :
  - prouver $A \vee B$ consiste à prouver A ou à prouver B
    - on ne sait pas prouver le tiers exclu $A \vee \neg A$
  - si l'on sait prouver A, alors on sait prouver $\neg\neg A$
    - mais on ne sait pas prouver A à partir de la preuve de $\neg\neg A$
  - une forme de raisonnement par l'absurde n'est possible que pour prouver la négation d'une formule

Logique intuitionniste – Logique classique

- pour le moment :
  - prouver $A \vee B$ consiste à prouver A ou à prouver B
    - on ne sait pas prouver le tiers exclu $A \vee \neg A$
  - si l'on sait prouver A, alors on sait prouver $\neg\neg A$
    - mais on ne sait pas prouver A à partir de la preuve de $\neg\neg A$
  - une forme de raisonnement par l'absurde n'est possible que pour prouver la négation d'une formule

c'est la **logique intuitionniste**

Logique intuitionniste – Logique classique

- pour le moment :
  - prouver $A \vee B$ consiste à prouver A ou à prouver B
    - on ne sait pas prouver le tiers exclu $A \vee \neg A$
  - si l'on sait prouver A, alors on sait prouver $\neg\neg A$
    - mais on ne sait pas prouver A à partir de la preuve de $\neg\neg A$
  - une forme de raisonnement par l'absurde n'est possible que pour prouver la négation d'une formule

  c'est la **logique intuitionniste**
- **logique classique** : on ajoute le raisonnement par l'absurde pour toutes les formules

Logique intuitionniste – Logique classique

- pour le moment :
  - prouver $A \vee B$ consiste à prouver A ou à prouver B
    - on ne sait pas prouver le tiers exclu $A \vee \neg A$
  - si l'on sait prouver A, alors on sait prouver $\neg\neg A$
    - mais on ne sait pas prouver A à partir de la preuve de $\neg\neg A$
  - une forme de raisonnement par l'absurde n'est possible que pour prouver la négation d'une formule

  c'est la **logique intuitionniste**

- **logique classique** : on ajoute le raisonnement par l'absurde pour toutes les formules
  - on peut alors prouver le tiers exclu et l'équivalence entre $\neg\neg A$ et A

Raisonnement par l'absurde (Abs)

- pour prouver A

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$ montrons A
$\langle i \rangle$	

Raisonnement par l'absurde (Abs)

- pour prouver A il suffit de supposer $\neg A$ et de prouver false

$$\boxed{\begin{array}{ll} \langle i \rangle & \text{supposons } h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n \\ & \text{montrons } A \\ & \boxed{\begin{array}{ll} \langle i+1 \rangle & \text{supposons } h : \neg A \\ & \text{montrons false} \\ & \boxed{\cdots} \\ \langle i+1 \rangle & \text{CQFD} \end{array}} \\ \langle i \rangle & \text{CQFD (Abs)} \end{array}}$$

Raisonnement par l'absurde (Abs)

- pour prouver A il suffit de supposer $\neg A$ et de prouver false

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
	montrons A
	$\langle i+1 \rangle$ supposons $h : \neg A$
	montrons false
	$\boxed{\cdots}$
	$\langle i+1 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD (Abs)

  - la formule A qui apparaît dans la boîte $\langle i+1 \rangle$ apparaît dans la boîte $\langle i \rangle$

Raisonnement par l'absurde (Abs)

- pour prouver A il suffit de supposer $\neg A$ et de prouver false

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
	montrons A
	$\langle i+1 \rangle$ supposons $h : \neg A$
	montrons false
	$\boxed{\cdots}$
	$\langle i+1 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD (Abs)

- la formule A qui apparaît dans la boîte $\langle i+1 \rangle$ apparaît dans la boîte $\langle i \rangle$
  - une fois que l'on a choisi d'appliquer cette règle, le contenu de la boîte $\langle i+1 \rangle$ est complètement déterminé par le contenu de la boîte $\langle i \rangle$

Règles dérivées

- permet de construire une preuve à partir d'autres preuves

Règles dérivées

- permet de construire une preuve à partir d'autres preuves
  - introduire une nouvelle règle correspondant à un raisonnement souvent utilisé

Règles dérivées

- permet de construire une preuve à partir d'autres preuves
  - introduire une nouvelle règle correspondant à un raisonnement souvent utilisé
- *exemple* : comment prouver A

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$ montrons A
$\langle i \rangle$	

Règles dérivées

- permet de construire une preuve à partir d'autres preuves
  - introduire une nouvelle règle correspondant à un raisonnement souvent utilisé
- *exemple* : comment prouver A à partir d'une preuve de $\neg\neg A$

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
	montrons A
	$\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg\neg A$
	$\boxed{\cdots}$
	$\langle i+1 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD $(R^1_\neg)$

Règle dérivée : exemple ($R^1_\neg$)

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$ montrons A
	$\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg\neg A$
	$\langle i+1 \rangle$
$\langle i \rangle$	CQFD ($R^1_\neg$)

$\langle 1 \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$ montrons A
$\langle 1 \rangle$	

Règle dérivée : exemple ($R^1_\neg$)

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
	montrons A
	$\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg\neg A$
	$\langle i+1 \rangle$
$\langle i \rangle$	CQFD ($R^1_\neg$)

$\langle 1 \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
	montrons A
	$\langle 2 \rangle$ supposons $h : \neg A$
	montrons false
	$\langle 2 \rangle$
$\langle 1 \rangle$	CQFD (Abs)

Règle dérivée : exemple ($R^1_\neg$)

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
	montrons A
	$\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg\neg A$
	$\langle i+1 \rangle$
$\langle i \rangle$	CQFD ($R^1_\neg$)

$\langle 1 \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$		
	montrons A		
	$\langle 2 \rangle$	supposons $h : \neg A$	
		montrons false	
		$\langle 3 \rangle$	montrons $\neg\neg A$
		$\langle 3 \rangle$	
		$\langle 4 \rangle$	montrons $\neg A$
		$\langle 4 \rangle$	
	$\langle 2 \rangle$	CQFD ($E_\neg$)	
$\langle 1 \rangle$	CQFD (Abs)		

Règle dérivée : exemple ($R^1_\neg$)

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$ montrons A	
	$\langle i+1 \rangle$	montrons $\neg\neg A$
	$\langle i+1 \rangle$	
$\langle i \rangle$	CQFD ($R^1_\neg$)	

$\langle 1 \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$ montrons A			
	$\langle 2 \rangle$	supposons $h : \neg A$ montrons false		
		$\langle 3 \rangle$	montrons $\neg\neg A$	
		$\langle 3 \rangle$		
		$\langle 4 \rangle$	montrons $\neg A$	
		$\langle 4 \rangle$	CQFD (Ax) avec h	
	$\langle 2 \rangle$	CQFD ($E_\neg$)		
$\langle 1 \rangle$	CQFD (Abs)			

Règle dérivée : exemple ($R^1_\neg$)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg\neg A$

$\langle i+1 \rangle$

$\langle i \rangle$ CQFD ($R^1_\neg$)

$\langle 1 \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle 2 \rangle$ supposons $h : \neg A$
montrons false

$\langle 3 \rangle$ montrons $\neg\neg A$

$\langle 4 \rangle$ montrons $\neg\neg A$
sans utiliser h

$\langle 4 \rangle$ CQFD

$\langle 3 \rangle$ CQFD (Af)

$\langle 4 \rangle$ montrons $\neg A$

$\langle 4 \rangle$ CQFD (Ax) avec h

$\langle 2 \rangle$ CQFD ($E_\neg$)

$\langle 1 \rangle$ CQFD (Abs)

Règle dérivée : exemple ($R^1_\neg$)

- $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
  montrons A
  - $\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg\neg A$
    $\boxed{\cdots}$
  - $\langle i+1 \rangle$ CQFD
- $\langle i \rangle$ CQFD ($R^1_\neg$)

- $\langle 1 \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
  montrons A
  - $\langle 2 \rangle$ supposons $h : \neg A$
    montrons false
    - $\langle 3 \rangle$ montrons $\neg\neg A$
      - $\langle 4 \rangle$ montrons $\neg\neg A$
        sans utiliser h
        $\boxed{\cdots}$
      - $\langle 4 \rangle$ CQFD
    - $\langle 3 \rangle$ CQFD (Af)
    - $\langle 4 \rangle$ montrons $\neg A$
    - $\langle 4 \rangle$ CQFD (Ax) avec h
  - $\langle 2 \rangle$ CQFD ($E_\neg$)
- $\langle 1 \rangle$ CQFD (Abs)

Règle dérivée : exemple ($R^1_\neg$)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons A
$\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg\neg A$
$\cdots$
$\langle i+1 \rangle$ CQFD
$\langle i \rangle$ CQFD ($R^1_\neg$)

$\langle 1 \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \cdots, h_n : A_n$
montrons A
$\langle 2 \rangle$ supposons $h : \neg A$
montrons false
$\langle 3 \rangle$ montrons $\neg\neg A$
$\langle 4 \rangle$ montrons $\neg\neg A$
sans utiliser h
$\cdots$
$\langle 4 \rangle$ CQFD
$\langle 3 \rangle$ CQFD (Af)

$\langle 4 \rangle$ montrons $\neg A$
$\langle 4 \rangle$ CQFD (Ax) avec h
$\langle 2 \rangle$ CQFD ($E_\neg$)
$\langle 1 \rangle$ CQFD (Abs)