

Cours 2

Règles de déduction : connecteurs

Logique – Licence Informatique



Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »

$$F_1 \Rightarrow F_2$$

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »

$$F_1 \Rightarrow F_2$$

« vraie » lorsque :

F_1 désigne l'énoncé : « *la figure f est un carré* »

F_2 désigne l'énoncé : « *la figure f a 4 côtés de longueurs égales* »

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »

$$F_1 \Rightarrow F_2$$

« vraie » lorsque :

F_1 désigne l'énoncé : « *la figure f est un carré* »

F_2 désigne l'énoncé : « *la figure f a 4 côtés de longueurs égales* »

« fausse » lorsque :

F_1 désigne l'énoncé : « *la figure f est un triangle* »

F_2 désigne l'énoncé : « *la figure f a 4 côtés de longueurs égales* »

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »

$$F_1 \Rightarrow F_2$$

« vraie » lorsque :

F_1 désigne l'énoncé : « *la figure f est un carré* »

F_2 désigne l'énoncé : « *la figure f a 4 côtés de longueurs égales* »

« fausse » lorsque :

F_1 désigne l'énoncé : « *la figure f est un triangle* »

F_2 désigne l'énoncé : « *la figure f a 4 côtés de longueurs égales* »

dépend de l'interprétation des symboles utilisés dans les énoncés :

formules contingentes

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »

$$(F_1 \wedge (F_1 \Rightarrow F_2)) \Rightarrow F_2$$

« vraie » quels que soient les énoncés désignés par F_1 et F_2

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »

$$(F_1 \wedge (F_1 \Rightarrow F_2)) \Rightarrow F_2$$

« vraie » quels que soient les énoncés désignés par F_1 et F_2

F_1 désigne l'énoncé : « *il pleut* »

F_2 désigne l'énoncé : « *je prends mon parapluie* »

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »

$$(F_1 \wedge (F_1 \Rightarrow F_2)) \Rightarrow F_2$$

« vraie » quels que soient les énoncés désignés par F_1 et F_2

F_1 désigne l'énoncé : « *n est le carré d'un entier relatif* »

F_2 désigne l'énoncé : « *n est un nombre positif ou nul* »

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »
 - ▶ toujours « fausses »

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »
 - ▶ toujours « fausses »

$$F \wedge \neg F$$

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »
 - ▶ toujours « fausses »

$$F \wedge \neg F$$

lorsqu'une formule est toujours fausse sa négation est toujours vraie

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »
 - ▶ toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de **systèmes de déduction**

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »
 - ▶ toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de **systèmes de déduction**
 - ▶ ensemble de règles logiques de raisonnement permettant de **prouver une formule**

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »
 - ▶ toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de **systèmes de déduction**
 - ▶ ensemble de règles logiques de raisonnement permettant de **prouver une formule**
 - règles qui ne dépendent pas de l'interprétation des formules

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »
 - ▶ toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de **systèmes de déduction**
 - ▶ ensemble de règles logiques de raisonnement permettant de **prouver une formule**
 - règles qui ne dépendent pas de l'interprétation des formules
 - règles qui définissent l'ensemble des raisonnements acceptés

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »
 - ▶ toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de **systèmes de déduction**
 - ▶ ensemble de règles logiques de raisonnement permettant de **prouver une formule**
 - ▶ un système de déduction permet de caractériser un sous-ensemble des formules logiques : **formules prouvables**

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »
 - ▶ toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de **systèmes de déduction**
- il existe plusieurs systèmes de déduction

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »
 - ▶ toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de **systèmes de déduction**
- il existe plusieurs systèmes de déduction
 - ▶ **Déduction Naturelle** (Gerhard Gentzen, 1934)

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »
 - ▶ toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de **systèmes de déduction**
- il existe plusieurs systèmes de déduction
 - ▶ **Déduction Naturelle** (Gerhard Gentzen, 1934)
- il existe plusieurs formalismes pour écrire des preuves

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »
 - ▶ toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de **systèmes de déduction**
- il existe plusieurs systèmes de déduction
 - ▶ **Déduction Naturelle** (Gerhard Gentzen, 1934)
- il existe plusieurs formalismes pour écrire des preuves
 - ▶ des emboîtements de boîtes
 - ★ preuves à la Lamport – preuves structurées
How to write a 21st century proof? (Leslie Lamport, 2011)
 - ★ preuves vérifiables (Isabelle/Isar-HOL)

Formules prouvables

- certaines formules logiques sont :
 - ▶ ni toujours « vraies », ni toujours « fausses »
 - ▶ toujours « vraies »
 - ▶ toujours « fausses »
- il est possible de caractériser les formules toujours « vraies » à l'aide de **systèmes de déduction**
- il existe plusieurs systèmes de déduction
 - ▶ **Déduction Naturelle** (Gerhard Gentzen, 1934)
- il existe plusieurs formalismes pour écrire des preuves
 - ▶ des emboîtements de boîtes
 - ★ preuves à la Lamport – preuves structurées
How to write a 21st century proof? (Leslie Lamport, 2011)
 - ★ preuves vérifiables (Isabelle/Isar-HOL)
 - ▶ il en existe d'autres ... (arbres d'inférence, etc)

Preuve : emboîtement de boîtes

- une étape i d'une preuve (boîte numéro i) :

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : F_1, h_2 : F_2, \dots, h_n : F_n$
montrons F
 ... preuve de F (séquence de sous-boîtes) ...
 $\langle i \rangle$ CQFD (Nom)

Preuve : emboîtement de boîtes

- une étape i d'une preuve (boîte numéro i) :

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : F_1, h_2 : F_2, \dots, h_n : F_n$
montrons F
 ... preuve de F (séquence de sous-boîtes) ...
 $\langle i \rangle$ CQFD (Nom)

- ▶ correspond à l'application d'une règle logique

Preuve : emboîtement de boîtes

- une étape i d'une preuve (boîte numéro i) :

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : F_1, h_2 : F_2, \dots, h_n : F_n$
montrons F
... preuve de F (séquence de sous-boîtes) ...
 $\langle i \rangle$ CQFD (Nom)

- ▶ correspond à l'application d'une règle logique
- ▶ (Nom) : nom de la règle logique utilisée pour montrer que F est prouvable avec les hypothèses $h_1 : F_1, \dots, h_n : F_n$ de la boîte à partir de la séquence de sous-boîtes donnée

Preuve : emboîtement de boîtes

- une étape i d'une preuve (boîte numéro i) :

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : F_1, h_2 : F_2, \dots, h_n : F_n$
montrons F
... preuve de F (séquence de sous-boîtes) ...
 $\langle i \rangle$ CQFD (Nom)

- ▶ correspond à l'application d'une règle logique
- ▶ (Nom) : nom de la règle logique utilisée pour montrer que F est prouvable avec les hypothèses $h_1 : F_1, \dots, h_n : F_n$ de la boîte à partir de la séquence de sous-boîtes donnée
- ▶ plusieurs boîtes d'une même preuve peuvent avoir le même numéro, mais toutes les sous-boîtes d'une boîte de numéro i ont un numéro strictement supérieur à i

Preuve : emboîtement de boîtes

- une étape i d'une preuve (boîte numéro i) :

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : F_1, h_2 : F_2, \dots, h_n : F_n$
montrons F
 ... preuve de F (séquence de sous-boîtes) ...
 $\langle i \rangle$ CQFD (Nom)

- ▶ h_j : label / nom de l'hypothèse

Preuve : emboîtement de boîtes

- une étape i d'une preuve (boîte numéro i) :

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : F_1, h_2 : F_2, \dots, h_n : F_n$
montrons F
... preuve de F (séquence de sous-boîtes) ...
 $\langle i \rangle$ CQFD (Nom)

- ▶ h_j : label / nom de l'hypothèse
- ▶ l'ordre dans lequel apparaissent les hypothèses d'une boîte n'a pas d'importance (ensemble non ordonné d'hypothèses)

Preuve : emboîtement de boîtes

- une étape i d'une preuve (boîte numéro i) :

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : F_1, h_2 : F_2, \dots, h_n : F_n$
montrons F
... preuve de F (séquence de sous-boîtes) ...
 $\langle i \rangle$ CQFD (Nom)

- ▶ h_j : label / nom de l'hypothèse
- ▶ l'ordre dans lequel apparaissent les hypothèses d'une boîte n'a pas d'importance (ensemble non ordonné d'hypothèses)
- ▶ plusieurs hypothèses différentes d'une même preuve peuvent avoir le même nom, mais le nom d'une hypothèse introduite dans une boîte de numéro i ne peut plus être utilisé pour nommer une hypothèse dans toutes les sous-boîtes de la boîte i

Preuve : emboîtement de boîtes

- une étape i d'une preuve (boîte numéro i) :

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : F_1, h_2 : F_2, \dots, h_n : F_n$
montrons F
 ... preuve de F (séquence de sous-boîtes) ...
 $\langle i \rangle$ CQFD (Nom)

- ▶ h_j : label / nom de l'hypothèse
- ▶ l'ordre dans lequel apparaissent les hypothèses d'une boîte n'a pas d'importance (ensemble non ordonné d'hypothèses)
- ▶ plusieurs hypothèses différentes d'une même preuve peuvent avoir le même nom, mais le nom d'une hypothèse introduite dans une boîte de numéro i ne peut plus être utilisé pour nommer une hypothèse dans toutes les sous-boîtes de la boîte i
- ▶ toutes les hypothèses d'une boîte peuvent être utilisées dans chacune de ses sous-boîtes (sauf mention explicite)

Axiome (Ax)

ce que l'on cherche à prouver est en hypothèse :

- $\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n, h : A$
montrons A
- $\langle i \rangle$ CQFD (Ax avec h)

Axiome (Ax)

ce que l'on cherche à prouver est en hypothèse :

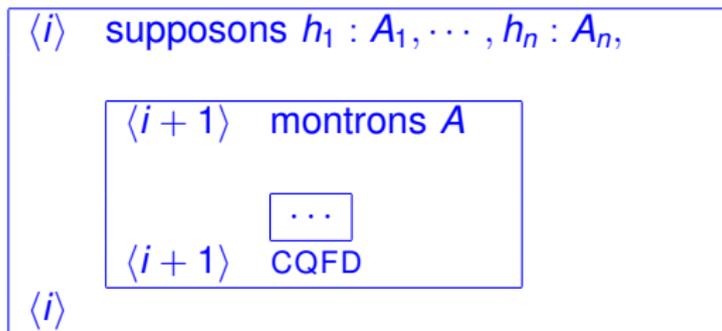
- | | |
|---------------------|--|
| $\langle i \rangle$ | supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n, h : A$
montrons A |
| $\langle i \rangle$ | CQFD (Ax avec h) |

l'hypothèse $h : A$ peut également être supposée dans une boîte $\langle j \rangle$ dont cette boîte $\langle i \rangle$ est une sous-boîte

- | | | | | | |
|---------------------|---|---------------------|---|---------------------|---------------------|
| $\langle j \rangle$ | supposons $h'_1 : A'_1, \dots, h'_k : A'_k, h : A$
montrons B
... | | | | |
| | <table border="1"><tr><td>$\langle i \rangle$</td><td>supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A</td></tr><tr><td>$\langle i \rangle$</td><td>CQFD (Ax avec h)</td></tr></table> | $\langle i \rangle$ | supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A | $\langle i \rangle$ | CQFD (Ax avec h) |
| $\langle i \rangle$ | supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A | | | | |
| $\langle i \rangle$ | CQFD (Ax avec h) | | | | |
| | ... | | | | |
| $\langle j \rangle$ | CQFD (Nom) | | | | |

Règle d'affaiblissement (Af)

si A est prouvable à partir des hypothèses de A_1, \dots, A_n



Règle d'affaiblissement (Af)

si A est prouvable à partir des hypothèses de A_1, \dots, A_n alors A est encore prouvable si on ajoute une hypothèse B

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n, h : B$
montrons A

$\langle i + 1 \rangle$ montrons A
sans utiliser h

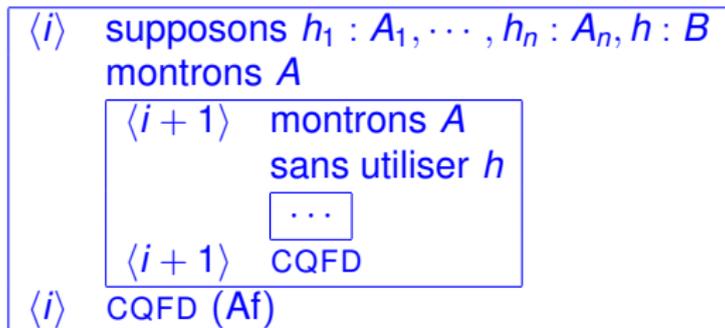
...

$\langle i + 1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (Af)

Règle d'affaiblissement (Af)

si A est prouvable à partir des hypothèses de A_1, \dots, A_n alors A est encore prouvable si on ajoute une hypothèse B



- utile dans certaines situations, par exemple lorsque l'on veut « réutiliser » une preuve existante qui utilise seulement un sous-ensemble des hypothèses disponibles

Règles d'introduction (I) et d'élimination (E)

- pour les constantes **true** et **false** :

- pour les connecteurs logiques (\Rightarrow , \wedge , \vee et \neg) :

Règles d'introduction (I) et d'élimination (E)

- pour les constantes **true** et **false** :
 - ▶ règles d'introduction
 - ★ permettent de prouver la formule constante

- pour les connecteurs logiques (\Rightarrow , \wedge , \vee et \neg) :
 - ▶ règles d'introduction
 - ★ permettent de prouver une formule dont la racine de l'arbre de syntaxe est le connecteur logique considéré

Règles d'introduction (I) et d'élimination (E)

- pour les constantes **true** et **false** :
 - ▶ règles d'introduction
 - ★ permettent de prouver la formule constante
 - ▶ règles d'élimination
 - ★ permettent de prouver une formule en **utilisant une hypothèse** correspondant à la formule constante
- pour les connecteurs logiques (\Rightarrow , \wedge , \vee et \neg) :
 - ▶ règles d'introduction
 - ★ permettent de prouver une formule dont la racine de l'arbre de syntaxe est le connecteur logique considéré
 - ▶ règles d'élimination
 - ★ permettent de prouver une formule en **utilisant une hypothèse** correspondant à une formule dont la racine de l'arbre de syntaxe est le connecteur logique considéré

Constante true

- introduction : permet de prouver la formule **true**
 - ▶ c'est un axiome

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$ montrons true
$\langle i \rangle$	CQFD (I_T)

Constante true

- introduction : permet de prouver la formule **true**
 - ▶ c'est un axiome

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$ montrons true
$\langle i \rangle$	CQFD (I_{\top})

- élimination : permet d'utiliser l'hypothèse $h : \text{true}$
 - ▶ pas de règle d'élimination pour **true**
 - ★ on ne peut rien déduire de l'hypothèse $h : \text{true}$

Constante false

- introduction : permet de prouver la formule **false**
 - ▶ pas de règle d'introduction : la formule **false** ne doit pas être prouvable (sans hypothèses contradictoires) !

Constante false

- introduction : permet de prouver la formule **false**
 - ▶ pas de règle d'introduction : la formule **false** ne doit pas être prouvable (sans hypothèses contradictoires) !
- élimination : permet d'utiliser l'hypothèse $h : \text{false}$
 - ▶ on peut **tout** déduire de l'hypothèse $h : \text{false}$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n, h : \text{false}$
montrons B
 $\langle i \rangle$ CQFD (E_{\perp} avec h)

Implication : introduction (I_{\Rightarrow})

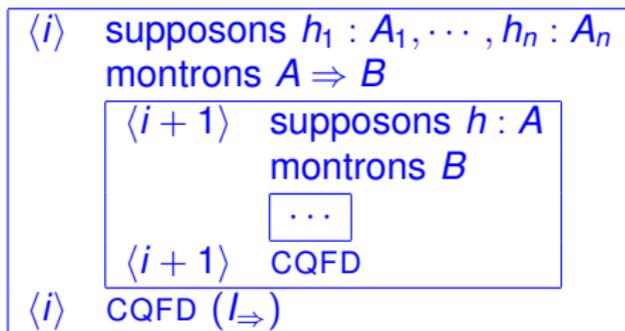
- pour prouver $A \Rightarrow B$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons $A \Rightarrow B$

$\langle i \rangle$

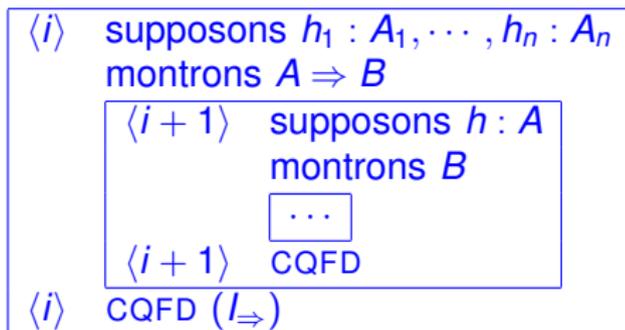
Implication : introduction (I_{\Rightarrow})

- pour prouver $A \Rightarrow B$ il suffit de supposer A et de prouver B



Implication : introduction (I_{\Rightarrow})

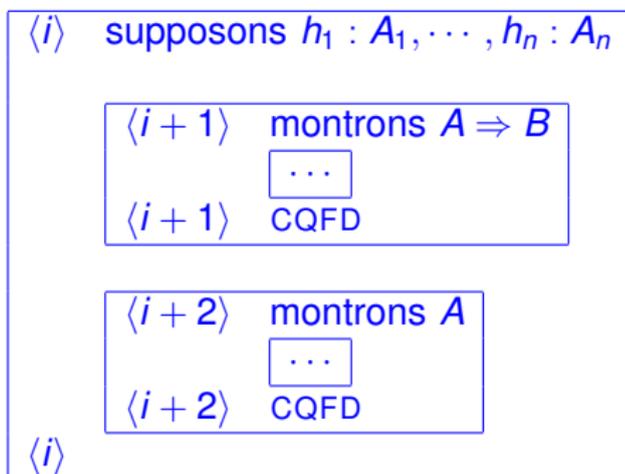
- pour prouver $A \Rightarrow B$ il suffit de supposer A et de prouver B



- les formules A et B de la boîte $\langle i + 1 \rangle$ sont des sous-formules de la formule $A \Rightarrow B$ de la boîte $\langle i \rangle$
 - une fois que l'on a choisi d'appliquer cette règle, le contenu de la boîte $\langle i + 1 \rangle$ est complètement déterminé par le contenu de la boîte $\langle i \rangle$

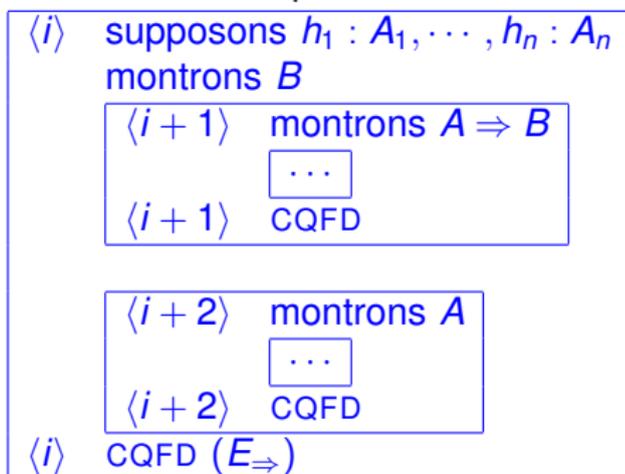
Implication : élimination (E_{\Rightarrow})

- *Modus-Ponens* : si à partir des hypothèses A_1, \dots, A_n on peut prouver $A \Rightarrow B$ et A



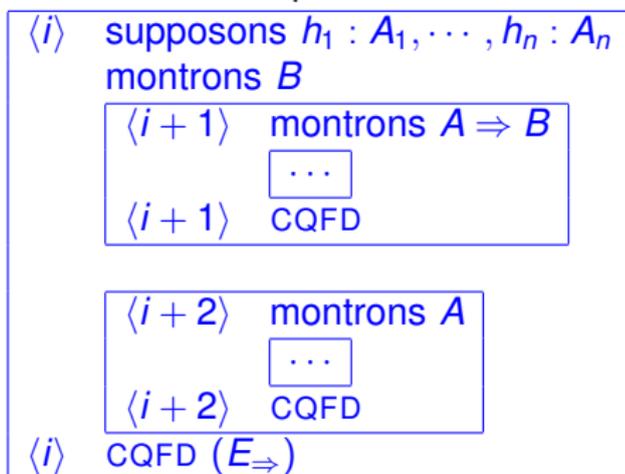
Implication : élimination (E_{\Rightarrow})

- *Modus-Ponens* : si à partir des hypothèses A_1, \dots, A_n on peut prouver $A \Rightarrow B$ et A alors la formule B est prouvable



Implication : élimination (E_{\Rightarrow})

- *Modus-Ponens* : si à partir des hypothèses A_1, \dots, A_n on peut prouver $A \Rightarrow B$ et A alors la formule B est prouvable



- ▶ la formule A des boîtes $\langle i + 1 \rangle$ et $\langle i + 2 \rangle$ n'est pas une sous-formule de la formule B de la boîte $\langle i \rangle$
 - ★ appliquer cette règle nécessite de choisir/trouver une formule A telle que les formules A et $A \Rightarrow B$ soient prouvables

Conjonction : introduction (I_{\wedge})

- pour prouver $A \wedge B$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons $A \wedge B$

$\langle i \rangle$

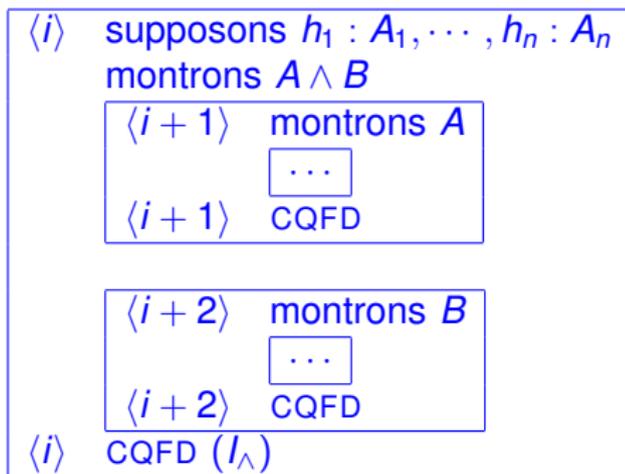
Conjonction : introduction (I_{\wedge})

- pour prouver $A \wedge B$ il suffit de prouver A et de prouver B

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$ montrons $A \wedge B$
$\langle i + 1 \rangle$	montrons A
	\dots
$\langle i + 1 \rangle$	CQFD
$\langle i + 2 \rangle$	montrons B
	\dots
$\langle i + 2 \rangle$	CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD (I_{\wedge})

Conjonction : introduction (I_{\wedge})

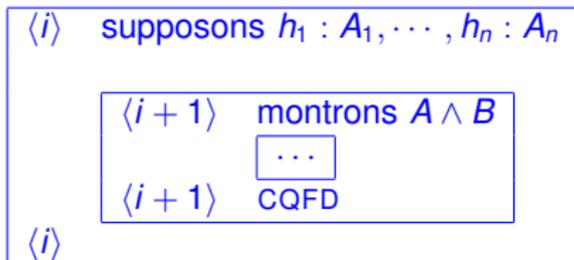
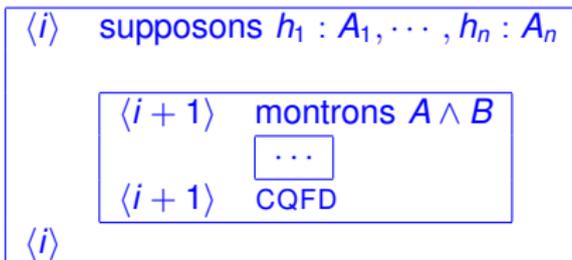
- pour prouver $A \wedge B$ il suffit de prouver A et de prouver B



- les formules A et B des boîtes $\langle i + 1 \rangle$ et $\langle i + 2 \rangle$ sont des sous-formules de la formule $A \wedge B$ de la boîte $\langle i \rangle$
 - une fois que l'on a choisi d'appliquer cette règle, le contenu des boîtes $\langle i + 1 \rangle$ et $\langle i + 2 \rangle$ est complètement déterminé par le contenu de la boîte $\langle i \rangle$

Conjonction : élimination (E_{\wedge}^g) (E_{\wedge}^d)

- si l'on dispose d'une preuve de $A \wedge B$



Conjonction : élimination (E_{\wedge}^g) (E_{\wedge}^d)

- si l'on dispose d'une preuve de $A \wedge B$ alors la formule A est prouvable

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$ montrons A							
	<table border="1"><tr><td>$\langle i + 1 \rangle$</td><td>montrons $A \wedge B$</td></tr><tr><td></td><td><table border="1"><tr><td>...</td></tr></table></td></tr><tr><td>$\langle i + 1 \rangle$</td><td>CQFD</td></tr></table>	$\langle i + 1 \rangle$	montrons $A \wedge B$		<table border="1"><tr><td>...</td></tr></table>	...	$\langle i + 1 \rangle$	CQFD
$\langle i + 1 \rangle$	montrons $A \wedge B$							
	<table border="1"><tr><td>...</td></tr></table>	...						
...								
$\langle i + 1 \rangle$	CQFD							
$\langle i \rangle$	CQFD (E_{\wedge}^g)							

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$ montrons $A \wedge B$							
	<table border="1"><tr><td>$\langle i + 1 \rangle$</td><td>montrons $A \wedge B$</td></tr><tr><td></td><td><table border="1"><tr><td>...</td></tr></table></td></tr><tr><td>$\langle i + 1 \rangle$</td><td>CQFD</td></tr></table>	$\langle i + 1 \rangle$	montrons $A \wedge B$		<table border="1"><tr><td>...</td></tr></table>	...	$\langle i + 1 \rangle$	CQFD
$\langle i + 1 \rangle$	montrons $A \wedge B$							
	<table border="1"><tr><td>...</td></tr></table>	...						
...								
$\langle i + 1 \rangle$	CQFD							
$\langle i \rangle$								

Conjonction : élimination (E_{\wedge}^g) (E_{\wedge}^d)

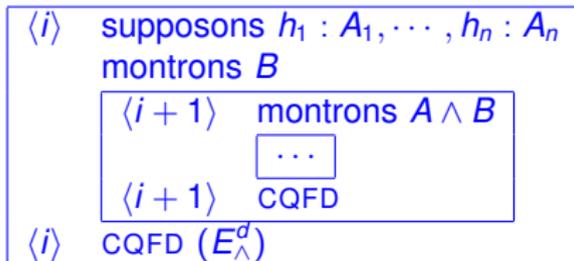
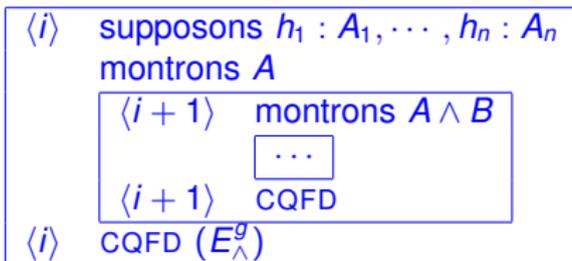
- si l'on dispose d'une preuve de $A \wedge B$ alors la formule A est prouvable et la formule B est prouvable

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$ montrons A
$\langle i + 1 \rangle$	montrons $A \wedge B$...
$\langle i + 1 \rangle$	CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD (E_{\wedge}^g)

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$ montrons B
$\langle i + 1 \rangle$	montrons $A \wedge B$...
$\langle i + 1 \rangle$	CQFD
$\langle i \rangle$	CQFD (E_{\wedge}^d)

Conjonction : élimination (E_{\wedge}^g) (E_{\wedge}^d)

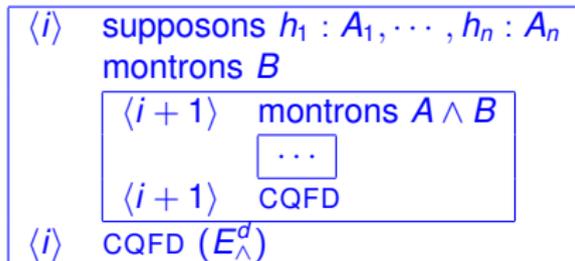
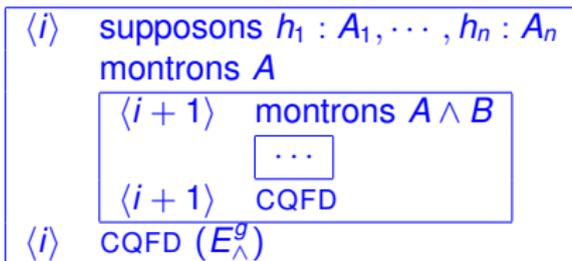
- si l'on dispose d'une preuve de $A \wedge B$ alors la formule A est prouvable et la formule B est prouvable



- (E_{\wedge}^g) : la sous-formule B de la boîte $\langle i + 1 \rangle$ n'est pas une sous-formule de la formule A de la boîte $\langle i \rangle$

Conjonction : élimination (E_{\wedge}^g) (E_{\wedge}^d)

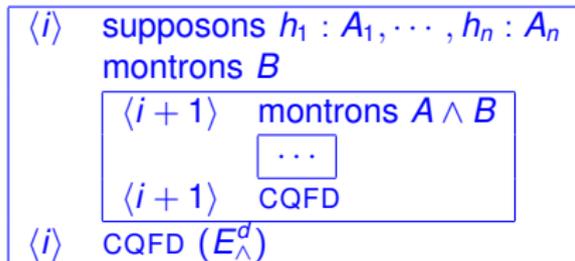
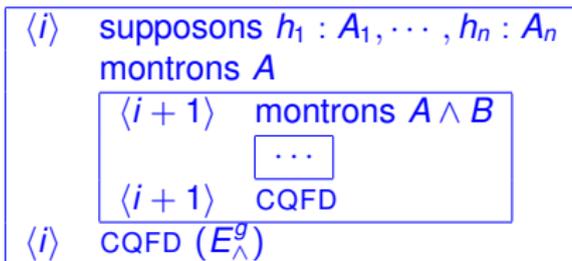
- si l'on dispose d'une preuve de $A \wedge B$ alors la formule A est prouvable et la formule B est prouvable



- (E_{\wedge}^g) : la sous-formule B de la boîte $\langle i + 1 \rangle$ n'est pas une sous-formule de la formule A de la boîte $\langle i \rangle$
- (E_{\wedge}^d) : la sous-formule A de la boîte $\langle i + 1 \rangle$ n'est pas une sous-formule de la formule B de la boîte $\langle i \rangle$

Conjonction : élimination (E_{\wedge}^g) (E_{\wedge}^d)

- si l'on dispose d'une preuve de $A \wedge B$ alors la formule A est prouvable et la formule B est prouvable



- ▶ (E_{\wedge}^g) : la sous-formule B de la boîte $\langle i + 1 \rangle$ n'est pas une sous-formule de la formule A de la boîte $\langle i \rangle$
- ▶ (E_{\wedge}^d) : la sous-formule A de la boîte $\langle i + 1 \rangle$ n'est pas une sous-formule de la formule B de la boîte $\langle i \rangle$
 - ★ appliquer cette règle nécessite de choisir/trouver une formule A ou une formule B telle que $A \wedge B$ soit prouvable
 - ★ la formule $A \wedge B$ peut être une hypothèse

Disjonction : introduction (I_{\vee}^g) (I_{\vee}^d)

- pour prouver $A \vee B$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons $A \vee B$

$\langle i \rangle$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons $A \vee B$

$\langle i \rangle$

Disjonction : introduction (I_{\vee}^g) (I_{\vee}^d)

- pour prouver $A \vee B$ il suffit de prouver A

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons $A \vee B$

$\langle i + 1 \rangle$ montrons A

...

$\langle i + 1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (I_{\vee}^g)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons $A \vee B$

$\langle i \rangle$

Disjonction : introduction (I_{\vee}^g) (I_{\vee}^d)

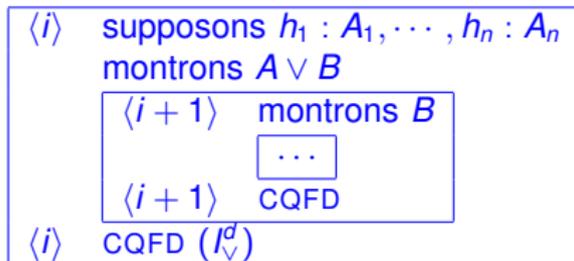
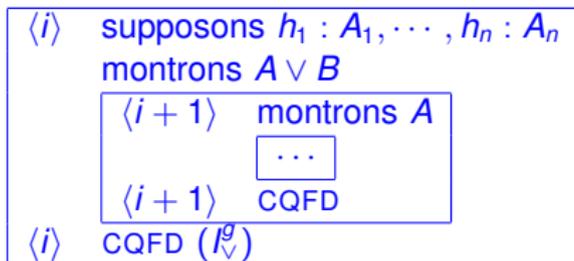
- pour prouver $A \vee B$ il suffit de prouver A ou bien de prouver B

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$ montrons $A \vee B$							
	<table border="1"><tr><td>$\langle i + 1 \rangle$</td><td>montrons A</td></tr><tr><td></td><td><table border="1"><tr><td>...</td></tr></table></td></tr><tr><td>$\langle i + 1 \rangle$</td><td>CQFD</td></tr></table>	$\langle i + 1 \rangle$	montrons A		<table border="1"><tr><td>...</td></tr></table>	...	$\langle i + 1 \rangle$	CQFD
$\langle i + 1 \rangle$	montrons A							
	<table border="1"><tr><td>...</td></tr></table>	...						
...								
$\langle i + 1 \rangle$	CQFD							
$\langle i \rangle$	CQFD (I_{\vee}^g)							

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$ montrons $A \vee B$							
	<table border="1"><tr><td>$\langle i + 1 \rangle$</td><td>montrons B</td></tr><tr><td></td><td><table border="1"><tr><td>...</td></tr></table></td></tr><tr><td>$\langle i + 1 \rangle$</td><td>CQFD</td></tr></table>	$\langle i + 1 \rangle$	montrons B		<table border="1"><tr><td>...</td></tr></table>	...	$\langle i + 1 \rangle$	CQFD
$\langle i + 1 \rangle$	montrons B							
	<table border="1"><tr><td>...</td></tr></table>	...						
...								
$\langle i + 1 \rangle$	CQFD							
$\langle i \rangle$	CQFD (I_{\vee}^d)							

Disjonction : introduction (I_{\vee}^g) (I_{\vee}^d)

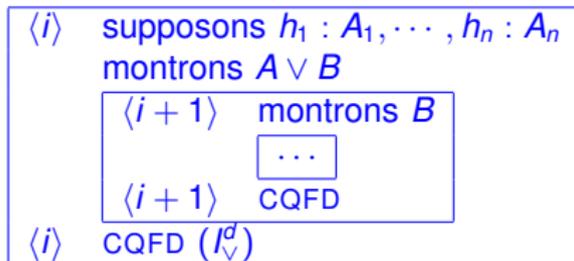
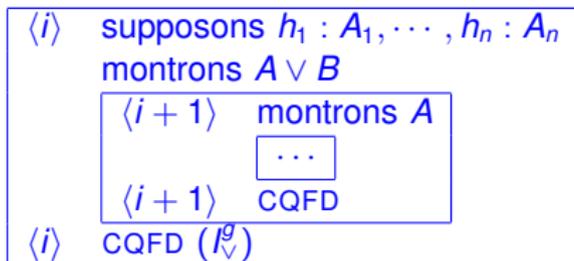
- pour prouver $A \vee B$ il suffit de prouver A ou bien de prouver B



- (I_{\vee}^g) : la formule A de la boîte $\langle i + 1 \rangle$ est une sous-formule de la formule $A \vee B$ de la boîte $\langle i \rangle$

Disjonction : introduction (I_{\vee}^g) (I_{\vee}^d)

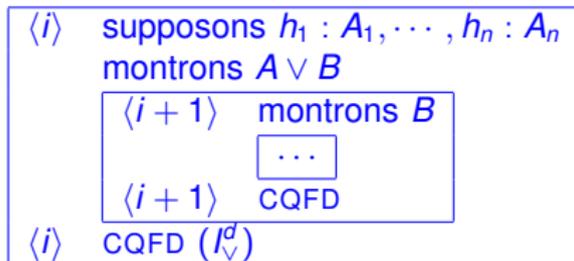
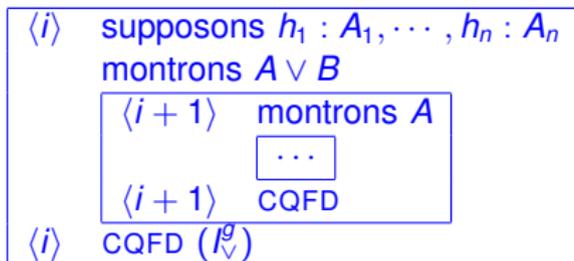
- pour prouver $A \vee B$ il suffit de prouver A ou bien de prouver B



- (I_{\vee}^g) : la formule A de la boîte $\langle i + 1 \rangle$ est une sous-formule de la formule $A \vee B$ de la boîte $\langle i \rangle$
- (I_{\vee}^d) : la formule B de la boîte $\langle i + 1 \rangle$ est une sous-formule de la formule $A \vee B$ de la boîte $\langle i \rangle$

Disjonction : introduction (I_{\vee}^g) (I_{\vee}^d)

- pour prouver $A \vee B$ il suffit de prouver A ou bien de prouver B



- (I_{\vee}^g) : la formule A de la boîte $\langle i + 1 \rangle$ est une sous-formule de la formule $A \vee B$ de la boîte $\langle i \rangle$
- (I_{\vee}^d) : la formule B de la boîte $\langle i + 1 \rangle$ est une sous-formule de la formule $A \vee B$ de la boîte $\langle i \rangle$
 - ★ une fois que l'on a choisi d'appliquer cette règle, le contenu de la boîte $\langle i + 1 \rangle$ est complètement déterminé par le contenu de la boîte $\langle i \rangle$

Disjonction : élimination (E_V)

- **raisonnement par cas**

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$

$\langle i \rangle$



Disjonction : élimination (E_V)

- **raisonnement par cas** : si à partir de l'hypothèse A on sait prouver C

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$

$\langle i + 2 \rangle$ supposons $h_A : A$
montrons C

...

$\langle i + 2 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$



Disjonction : élimination (E_V)

- **raisonnement par cas** : si à partir de l'hypothèse A on sait prouver C et si à partir de l'hypothèse B on sait prouver C

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$

$\langle i + 2 \rangle$ supposons $h_A : A$
montrons C

...

$\langle i + 2 \rangle$ CQFD

$\langle i + 3 \rangle$ supposons $h_B : B$
montrons C

...

$\langle i + 3 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$



Disjonction : élimination (E_V)

- **raisonnement par cas** : si à partir de l'hypothèse A on sait prouver C et si à partir de l'hypothèse B on sait prouver C et si on sait prouver $A \vee B$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$

$\langle i + 1 \rangle$ montrons $A \vee B$

...

$\langle i + 1 \rangle$ CQFD

$\langle i + 2 \rangle$ supposons $h_A : A$
montrons C

...

$\langle i + 2 \rangle$ CQFD

$\langle i + 3 \rangle$ supposons $h_B : B$
montrons C

...

$\langle i + 3 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$



Disjonction : élimination (E_V)

- **raisonnement par cas** : si à partir de l'hypothèse A on sait prouver C et si à partir de l'hypothèse B on sait prouver C et si on sait prouver $A \vee B$ alors C est prouvable

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons C

$\langle i + 1 \rangle$ montrons $A \vee B$

...

$\langle i + 1 \rangle$ CQFD

$\langle i + 2 \rangle$ supposons $h_A : A$
montrons C

...

$\langle i + 2 \rangle$ CQFD

$\langle i + 3 \rangle$ supposons $h_B : B$
montrons C

...

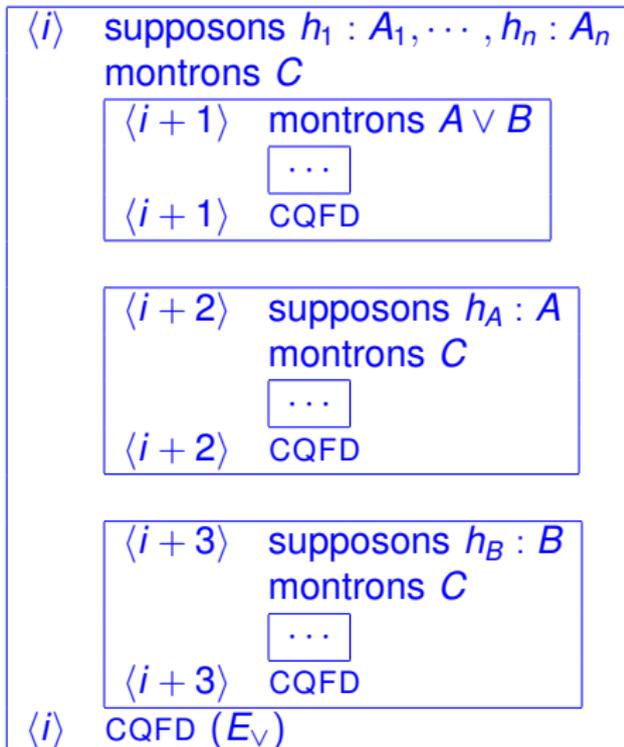
$\langle i + 3 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (E_V)



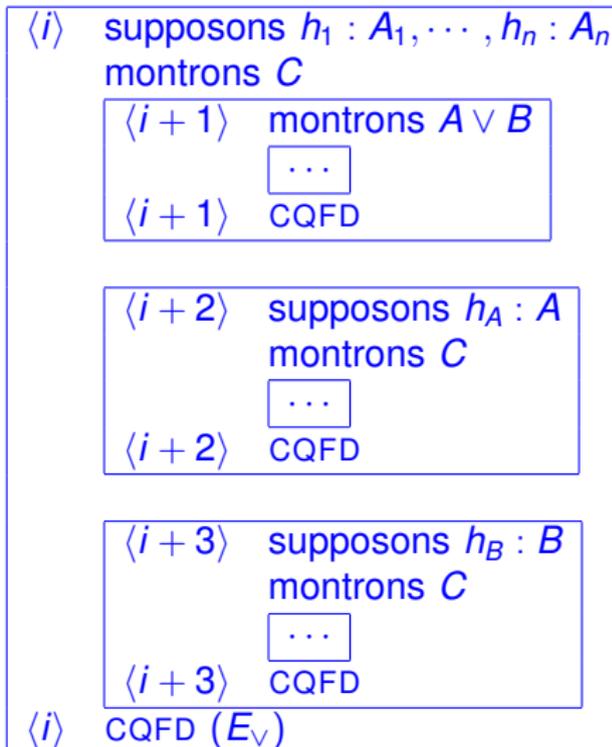
Disjonction : élimination (E_V)

- **raisonnement par cas** : si à partir de l'hypothèse A on sait prouver C et si à partir de l'hypothèse B on sait prouver C et si on sait prouver $A \vee B$ alors C est prouvable
 - ▶ les formules A et B des boîtes $\langle i+1 \rangle$, $\langle i+2 \rangle$ et $\langle i+3 \rangle$ n'apparaissent pas dans la boîte $\langle i \rangle$



Disjonction : élimination (E_V)

- **raisonnement par cas** : si à partir de l'hypothèse A on sait prouver C et si à partir de l'hypothèse B on sait prouver C et si on sait prouver $A \vee B$ alors C est prouvable
 - ▶ les formules A et B des boîtes $\langle i+1 \rangle$, $\langle i+2 \rangle$ et $\langle i+3 \rangle$ n'apparaissent pas dans la boîte $\langle i \rangle$
 - ★ appliquer cette règle nécessite de trouver deux formules A et B telles que $A \vee B$ soit prouvable et telles que C soit prouvable à partir de A et soit aussi prouvable à partir de B



Négation : introduction (I_{\neg})

- pour prouver $\neg A$

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons $\neg A$

$\langle i \rangle$

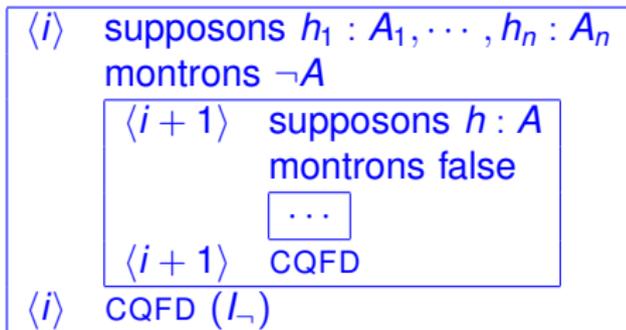
Négation : introduction (I_{\neg})

- pour prouver $\neg A$ il suffit de supposer A et de prouver **false**

$\langle i \rangle$	supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$ montrons $\neg A$	
$\langle i + 1 \rangle$	supposons $h : A$ montrons false	
	<table border="1"><tr><td>...</td></tr></table>	...
...		
$\langle i + 1 \rangle$	CQFD	
$\langle i \rangle$	CQFD (I_{\neg})	

Négation : introduction (I_{\neg})

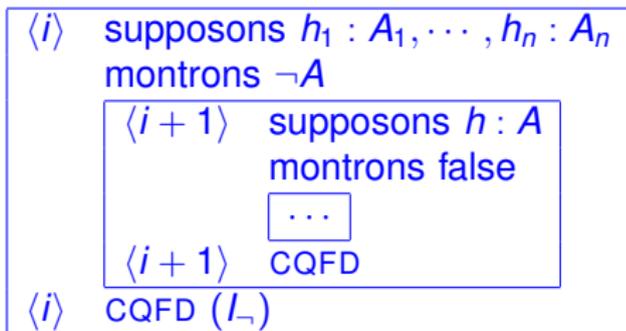
- pour prouver $\neg A$ il suffit de supposer A et de prouver **false**



- forme particulière d'un raisonnement par l'absurde (utilisable uniquement pour prouver la négation d'une formule)

Négation : introduction (I_{\neg})

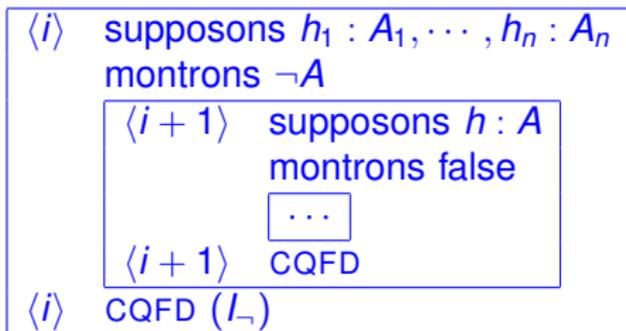
- pour prouver $\neg A$ il suffit de supposer A et de prouver **false**



- ▶ forme particulière d'un raisonnement par l'absurde (utilisable uniquement pour prouver la négation d'une formule)
- ▶ revient à voir une preuve de $\neg A$ comme une preuve de $A \Rightarrow$ **false**

Négation : introduction (I_{\neg})

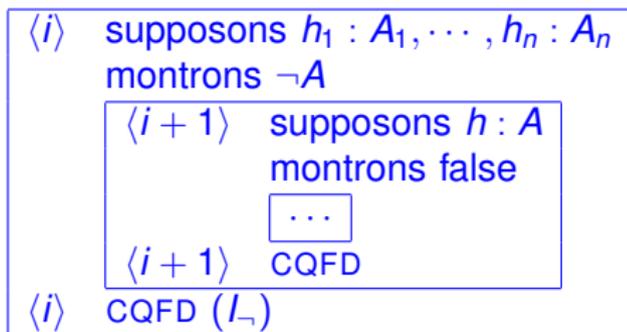
- pour prouver $\neg A$ il suffit de supposer A et de prouver **false**



- ▶ forme particulière d'un raisonnement par l'absurde (utilisable uniquement pour prouver la négation d'une formule)
- ▶ revient à voir une preuve de $\neg A$ comme une preuve de $A \Rightarrow$ **false**
- ▶ la formule A de la boîte $\langle i + 1 \rangle$ est une sous-formule de la formule $\neg A$ de la boîte $\langle i \rangle$

Négation : introduction (I_{\neg})

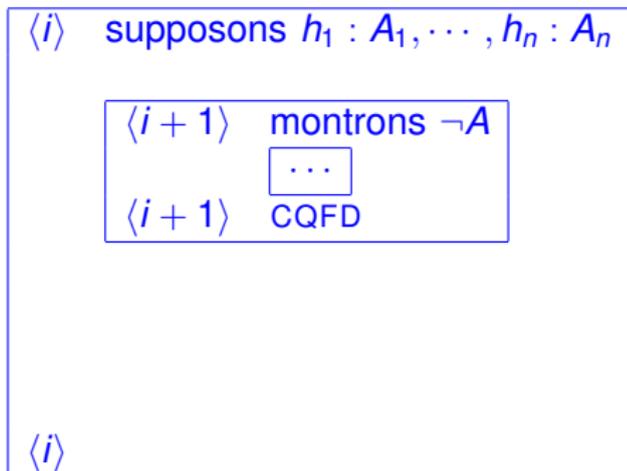
- pour prouver $\neg A$ il suffit de supposer A et de prouver **false**



- forme particulière d'un raisonnement par l'absurde (utilisable uniquement pour prouver la négation d'une formule)
- revient à voir une preuve de $\neg A$ comme une preuve de $A \Rightarrow$ **false**
- la formule A de la boîte $\langle i + 1 \rangle$ est une sous-formule de la formule $\neg A$ de la boîte $\langle i \rangle$
 - une fois que l'on a choisi d'appliquer cette règle, le contenu de la boîte $\langle i + 1 \rangle$ est complètement déterminé par le contenu de la boîte $\langle i \rangle$

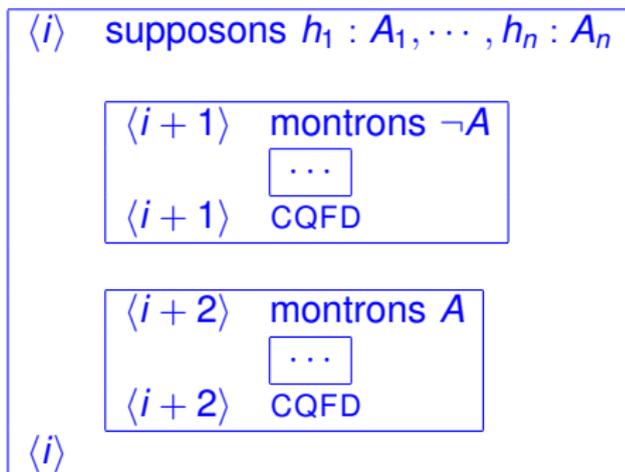
Négation : élimination (E_{\neg})

- si on sait prouver une formule $\neg A$



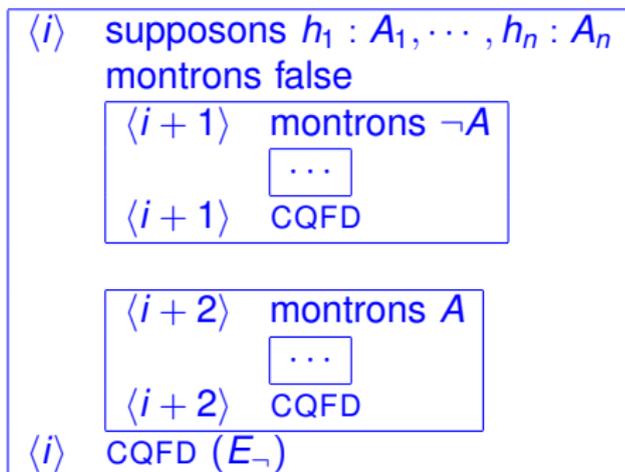
Négation : élimination (E_{\neg})

- si on sait prouver une formule $\neg A$ et si on sait aussi prouver A



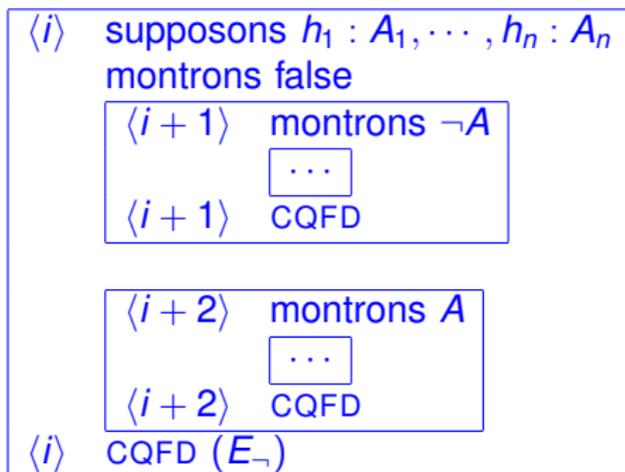
Négation : élimination (E_{\neg})

- si on sait prouver une formule $\neg A$ et si on sait aussi prouver A alors **false** est prouvable



Négation : élimination (E_{\neg})

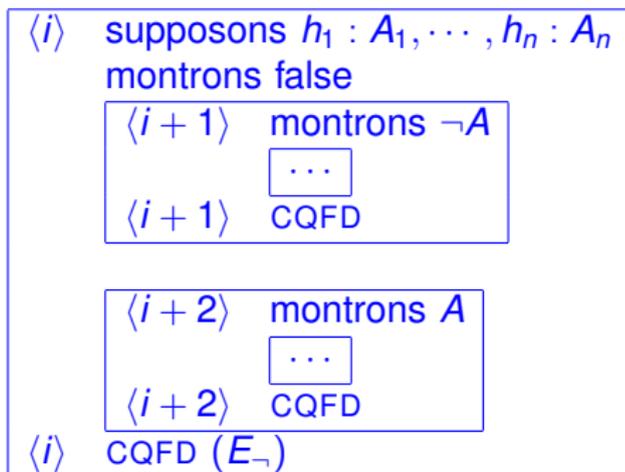
- si on sait prouver une formule $\neg A$ et si on sait aussi prouver A alors **false** est prouvable



- la formule A qui apparaît dans les boîtes $\langle i + 1 \rangle$ et $\langle i + 2 \rangle$ n'apparaît pas dans la boîte $\langle i \rangle$

Négation : élimination (E_{\neg})

- si on sait prouver une formule $\neg A$ et si on sait aussi prouver A alors **false** est prouvable



- la formule A qui apparaît dans les boîtes $\langle i + 1 \rangle$ et $\langle i + 2 \rangle$ n'apparaît pas dans la boîte $\langle i \rangle$
 - appliquer cette règle nécessite de choisir/trouver une formule A telle que A soit prouvable et $\neg A$ soit aussi prouvable

Exemple

(1) montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

(1)



Exemple

(1) montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

(2) supposons $h_1 : \neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$

(2)

(1) CQFD ($I \Rightarrow$)



Exemple

(1) montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

(2) supposons $h_1 : \neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$

(3) montrons $\neg A$

(3)

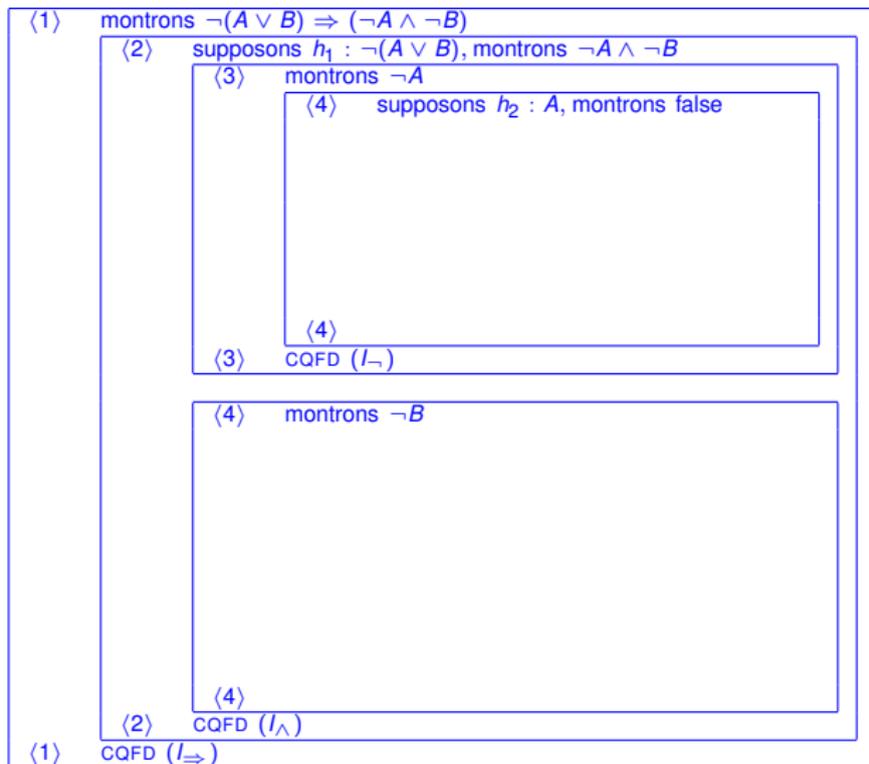
(4) montrons $\neg B$

(4)

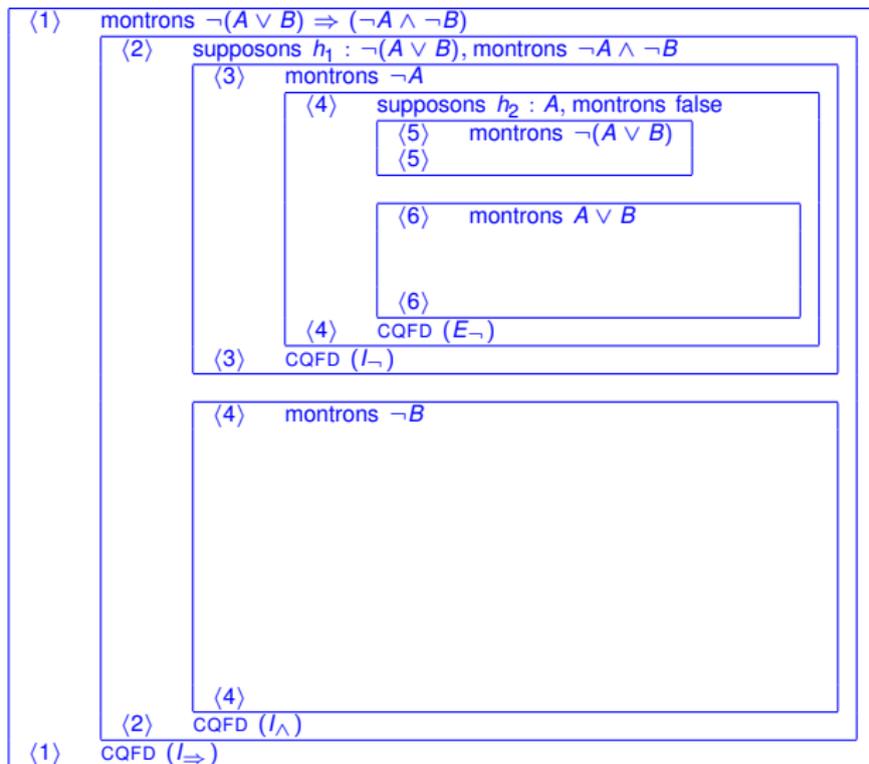
(2) CQFD (I_{\wedge})

(1) CQFD (I_{\Rightarrow})

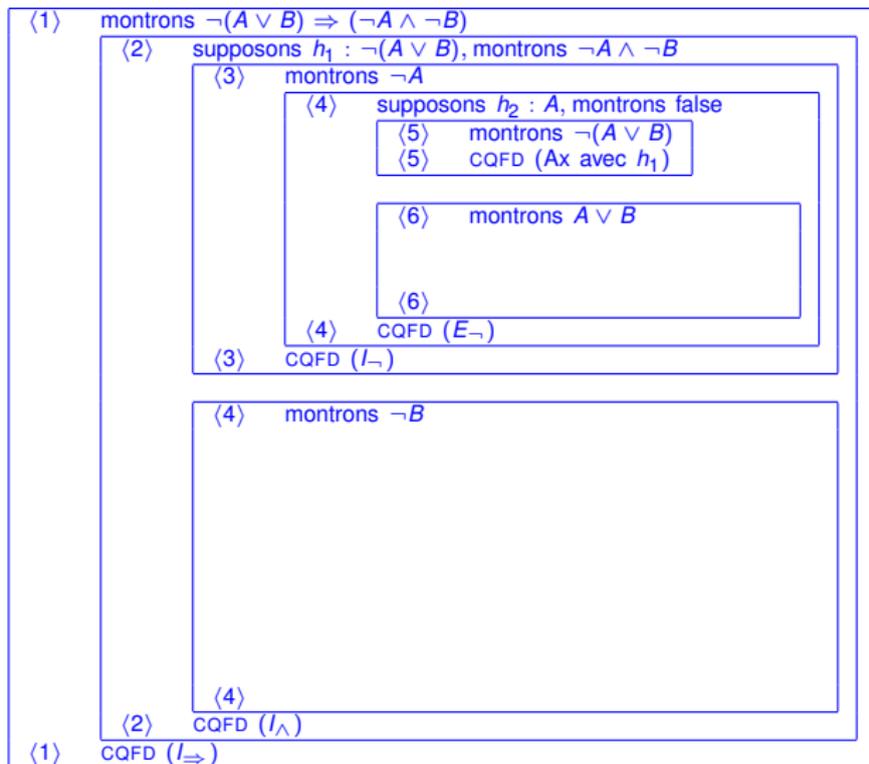
Exemple



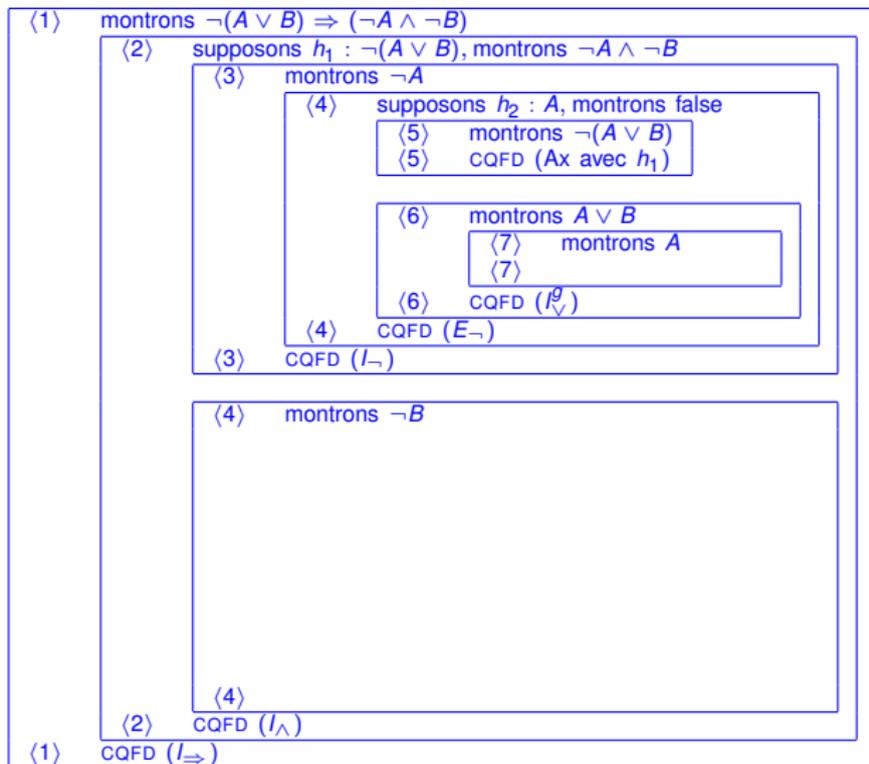
Exemple



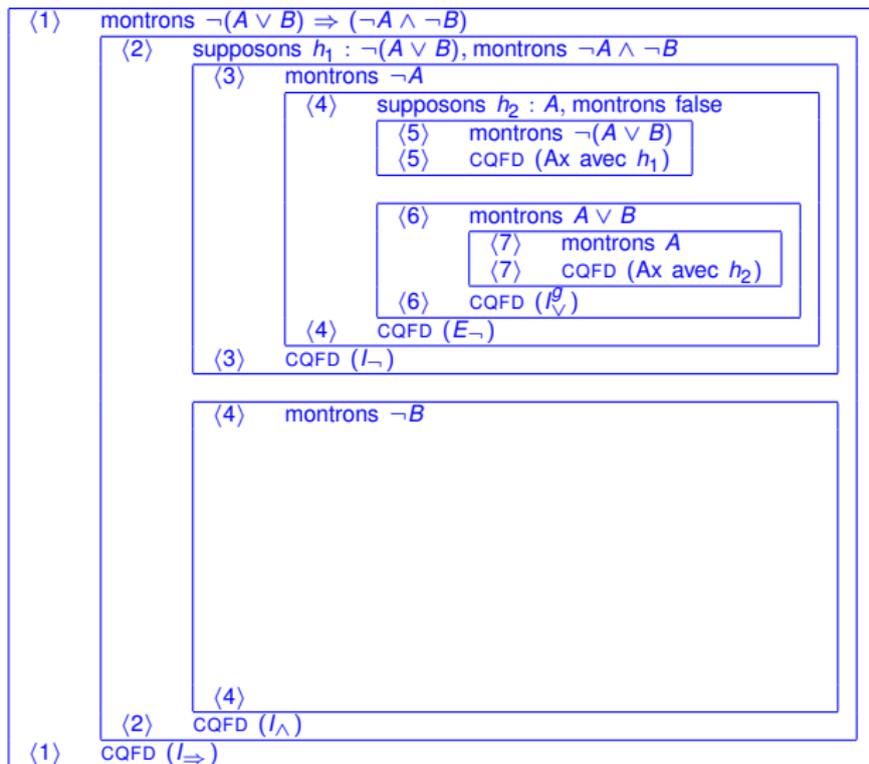
Exemple



Exemple



Exemple



Exemple

(1) montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

(2) supposons $h_1 : \neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$

(3) montrons $\neg A$

(4) supposons $h_2 : A$, montrons false

(5) montrons $\neg(A \vee B)$

(5) CQFD (Ax avec h_1)

(6) montrons $A \vee B$

(7) montrons A

(7) CQFD (Ax avec h_2)

(6) CQFD (I_{\vee}^g)

(4) CQFD (E_{\neg})

(3) CQFD (I_{\neg})

(4) montrons $\neg B$

(5) supposons $h_3 : B$, montrons false

(5)

(4) CQFD (I_{\neg})

(2) CQFD (I_{\wedge})

(1) CQFD (I_{\Rightarrow})

Exemple

(1) montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

(2) supposons $h_1 : \neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$

(3) montrons $\neg A$

(4) supposons $h_2 : A$, montrons false

(5) montrons $\neg(A \vee B)$

(5) CQFD (Ax avec h_1)

(6) montrons $A \vee B$

(7) montrons A

(7) CQFD (Ax avec h_2)

(6) CQFD (I_{\vee}^g)

(4) CQFD (E_{\neg})

(3) CQFD (I_{\neg})

(4) montrons $\neg B$

(5) supposons $h_3 : B$, montrons false

(6) montrons $\neg(A \vee B)$

(6)

(7) montrons $A \vee B$

(7)

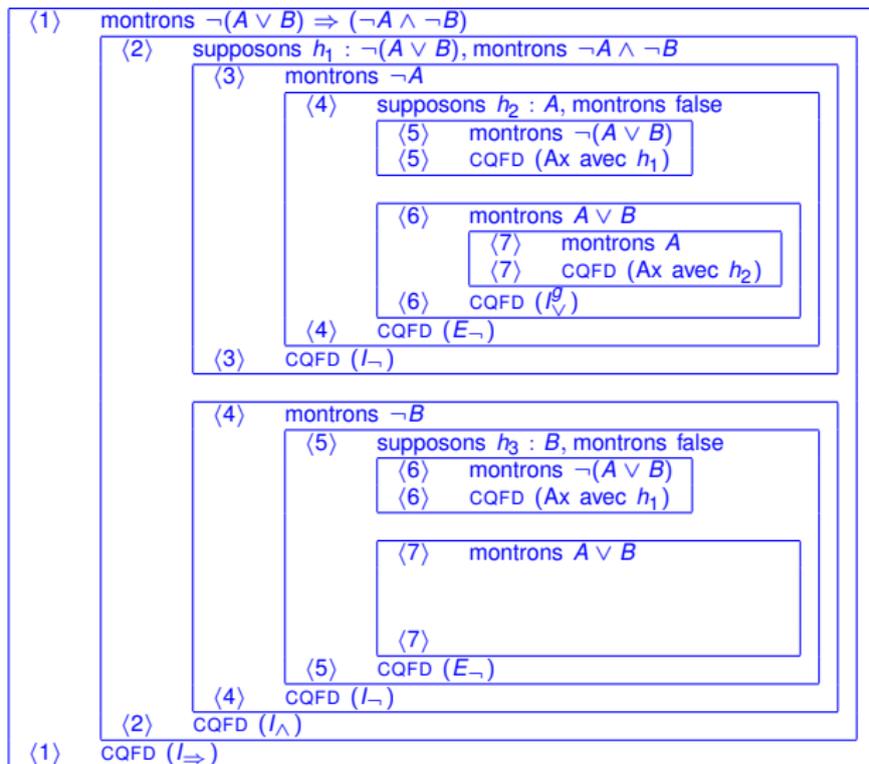
(5) CQFD (E_{\neg})

(4) CQFD (I_{\neg})

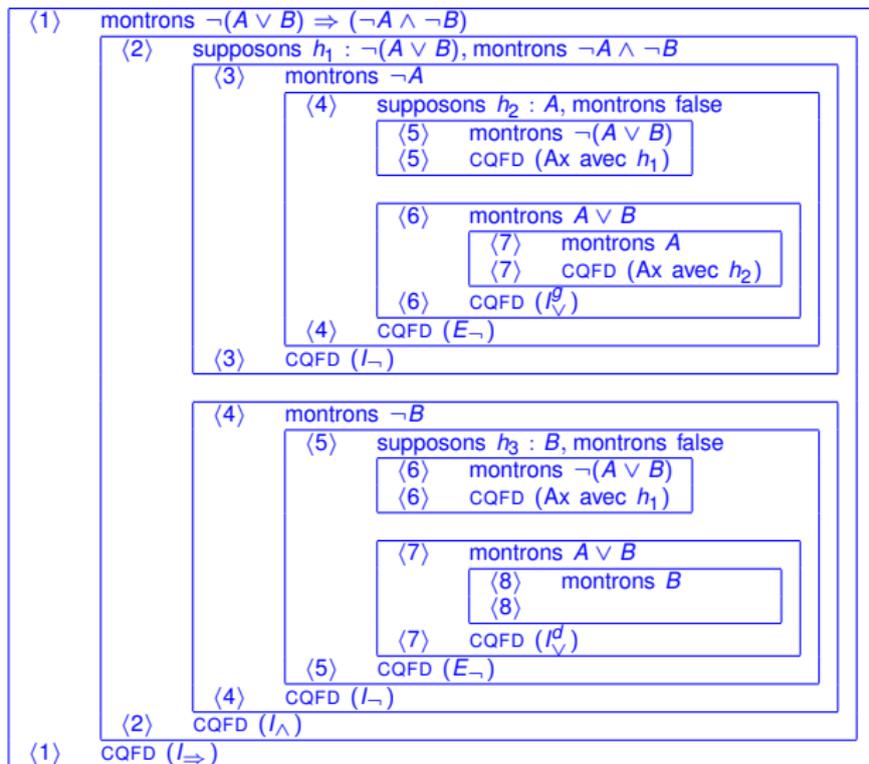
(2) CQFD (I_{\wedge})

(1) CQFD (I_{\Rightarrow})

Exemple



Exemple



Exemple

(1) montrons $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

(2) supposons $h_1 : \neg(A \vee B)$, montrons $\neg A \wedge \neg B$

(3) montrons $\neg A$

(4) supposons $h_2 : A$, montrons false

(5) montrons $\neg(A \vee B)$

(5) CQFD (Ax avec h_1)

(6) montrons $A \vee B$

(7) montrons A

(7) CQFD (Ax avec h_2)

(6) CQFD (I_{\vee}^d)

(4) CQFD (E_{\neg})

(3) CQFD (I_{\neg})

(4) montrons $\neg B$

(5) supposons $h_3 : B$, montrons false

(6) montrons $\neg(A \vee B)$

(6) CQFD (Ax avec h_1)

(7) montrons $A \vee B$

(8) montrons B

(8) CQFD (Ax avec h_3)

(7) CQFD (I_{\vee}^d)

(5) CQFD (E_{\neg})

(4) CQFD (I_{\neg})

(2) CQFD (I_{\wedge})

(1) CQFD (I_{\Rightarrow})

Logique intuitionniste – Logique classique

- pour le moment :
 - ▶ prouver $A \vee B$ consiste à prouver A ou à prouver B

Logique intuitionniste – Logique classique

- pour le moment :
 - ▶ prouver $A \vee B$ consiste à prouver A ou à prouver B
 - ★ on ne sait pas prouver le tiers exclu $A \vee \neg A$

Logique intuitionniste – Logique classique

- pour le moment :
 - ▶ prouver $A \vee B$ consiste à prouver A ou à prouver B
 - ★ on ne sait pas prouver le tiers exclu $A \vee \neg A$
 - ▶ si l'on sait prouver A , alors on sait prouver $\neg\neg A$
 - ★ mais on ne sait pas prouver A à partir de la preuve de $\neg\neg A$

Logique intuitionniste – Logique classique

- pour le moment :
 - ▶ prouver $A \vee B$ consiste à prouver A ou à prouver B
 - ★ on ne sait pas prouver le tiers exclu $A \vee \neg A$
 - ▶ si l'on sait prouver A , alors on sait prouver $\neg\neg A$
 - ★ mais on ne sait pas prouver A à partir de la preuve de $\neg\neg A$
 - ▶ une forme de raisonnement par l'absurde n'est possible que pour prouver la négation d'une formule

Logique intuitionniste – Logique classique

- pour le moment :
 - ▶ prouver $A \vee B$ consiste à prouver A ou à prouver B
 - ★ on ne sait pas prouver le tiers exclu $A \vee \neg A$
 - ▶ si l'on sait prouver A , alors on sait prouver $\neg\neg A$
 - ★ mais on ne sait pas prouver A à partir de la preuve de $\neg\neg A$
 - ▶ une forme de raisonnement par l'absurde n'est possible que pour prouver la négation d'une formule

c'est la **logique intuitionniste**

Logique intuitionniste – Logique classique

- pour le moment :
 - ▶ prouver $A \vee B$ consiste à prouver A ou à prouver B
 - ★ on ne sait pas prouver le tiers exclu $A \vee \neg A$
 - ▶ si l'on sait prouver A , alors on sait prouver $\neg\neg A$
 - ★ mais on ne sait pas prouver A à partir de la preuve de $\neg\neg A$
 - ▶ une forme de raisonnement par l'absurde n'est possible que pour prouver la négation d'une formule

c'est la **logique intuitionniste**

- **logique classique** : on ajoute le raisonnement par l'absurde pour toutes les formules

Logique intuitionniste – Logique classique

- pour le moment :
 - ▶ prouver $A \vee B$ consiste à prouver A ou à prouver B
 - ★ on ne sait pas prouver le tiers exclu $A \vee \neg A$
 - ▶ si l'on sait prouver A , alors on sait prouver $\neg\neg A$
 - ★ mais on ne sait pas prouver A à partir de la preuve de $\neg\neg A$
 - ▶ une forme de raisonnement par l'absurde n'est possible que pour prouver la négation d'une formule

c'est la **logique intuitionniste**

- **logique classique** : on ajoute le raisonnement par l'absurde pour toutes les formules
 - ▶ on peut alors prouver le tiers exclu et l'équivalence entre $\neg\neg A$ et A

Raisonnement par l'absurde (Abs)

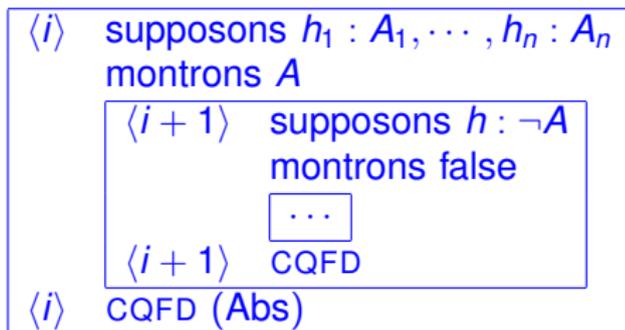
- pour prouver A

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i \rangle$

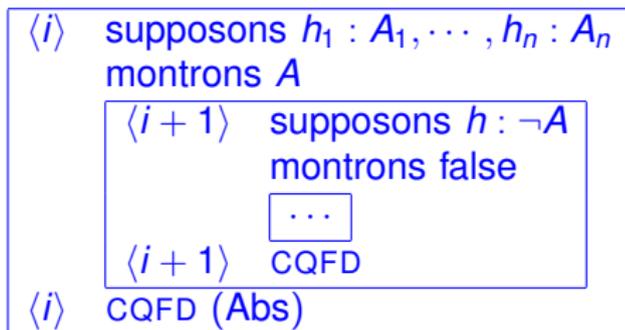
Raisonnement par l'absurde (Abs)

- pour prouver A il suffit de supposer $\neg A$ et de prouver $false$



Raisonnement par l'absurde (Abs)

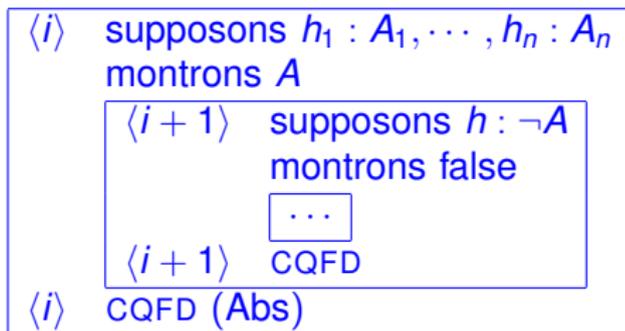
- pour prouver A il suffit de supposer $\neg A$ et de prouver false



- la formule A qui apparaît dans la boîte $\langle i + 1 \rangle$ apparaît dans la boîte $\langle i \rangle$

Raisonnement par l'absurde (Abs)

- pour prouver A il suffit de supposer $\neg A$ et de prouver false



- la formule A qui apparaît dans la boîte $\langle i + 1 \rangle$ apparaît dans la boîte $\langle i \rangle$
 - une fois que l'on a choisi d'appliquer cette règle, le contenu de la boîte $\langle i + 1 \rangle$ est complètement déterminé par le contenu de la boîte $\langle i \rangle$

Règles dérivées

- permet de construire une preuve à partir d'autres preuves

Règles dérivées

- permet de construire une preuve à partir d'autres preuves
 - ▶ introduire une nouvelle règle correspondant à un raisonnement souvent utilisé

Règles dérivées

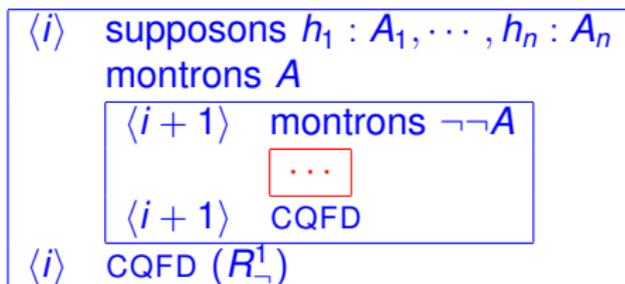
- permet de construire une preuve à partir d'autres preuves
 - ▶ introduire une nouvelle règle correspondant à un raisonnement souvent utilisé
- *exemple* : comment prouver A

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i \rangle$

Règles dérivées

- permet de construire une preuve à partir d'autres preuves
 - ▶ introduire une nouvelle règle correspondant à un raisonnement souvent utilisé
- *exemple* : comment prouver A à partir d'une preuve de $\neg\neg A$



Règle dérivée : exemple (R_{\neg}^1)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i + 1 \rangle$ montrons $\neg\neg A$

$\langle i + 1 \rangle$

$\langle i \rangle$ CQFD (R_{\neg}^1)

$\langle 1 \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle 1 \rangle$

Règle dérivée : exemple (R_{\neg}^1)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i + 1 \rangle$ montrons $\neg\neg A$

$\langle i + 1 \rangle$

$\langle i \rangle$ CQFD (R_{\neg}^1)

$\langle 1 \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle 2 \rangle$ supposons $h : \neg A$
montrons false

$\langle 2 \rangle$

$\langle 1 \rangle$ CQFD (Abs)

Règle dérivée : exemple (R_{\neg}^1)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i + 1 \rangle$ montrons $\neg\neg A$

$\langle i + 1 \rangle$

$\langle i \rangle$ CQFD (R_{\neg}^1)

$\langle 1 \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle 2 \rangle$ supposons $h : \neg A$
montrons false

$\langle 3 \rangle$ montrons $\neg\neg A$

$\langle 3 \rangle$

$\langle 4 \rangle$ montrons $\neg A$

$\langle 4 \rangle$

$\langle 2 \rangle$ CQFD (E_{\neg})

$\langle 1 \rangle$ CQFD (Abs)

Règle dérivée : exemple (R_{\neg}^1)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i + 1 \rangle$ montrons $\neg\neg A$

$\langle i + 1 \rangle$

$\langle i \rangle$ CQFD (R_{\neg}^1)

$\langle 1 \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle 2 \rangle$ supposons $h : \neg A$
montrons false

$\langle 3 \rangle$ montrons $\neg\neg A$

$\langle 3 \rangle$

$\langle 4 \rangle$ montrons $\neg A$

$\langle 4 \rangle$ CQFD (Ax) avec h

$\langle 2 \rangle$ CQFD (E_{\neg})

$\langle 1 \rangle$ CQFD (Abs)

Règle dérivée : exemple (R_{\neg}^1)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg\neg A$

$\langle i+1 \rangle$

$\langle i \rangle$ CQFD (R_{\neg}^1)

$\langle 1 \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle 2 \rangle$ supposons $h : \neg A$
montrons false

$\langle 3 \rangle$ montrons $\neg\neg A$

$\langle 4 \rangle$ montrons $\neg\neg A$
sans utiliser h

$\langle 4 \rangle$ CQFD

$\langle 3 \rangle$ CQFD (Af)

$\langle 4 \rangle$ montrons $\neg A$

$\langle 4 \rangle$ CQFD (Ax) avec h

$\langle 2 \rangle$ CQFD (E_{\neg})

$\langle 1 \rangle$ CQFD (Abs)

Règle dérivée : exemple (R_{\neg}^1)

$\langle i \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle i+1 \rangle$ montrons $\neg\neg A$

\dots

$\langle i+1 \rangle$ CQFD

$\langle i \rangle$ CQFD (R_{\neg}^1)

$\langle 1 \rangle$ supposons $h_1 : A_1, \dots, h_n : A_n$
montrons A

$\langle 2 \rangle$ supposons $h : \neg A$
montrons false

$\langle 3 \rangle$ montrons $\neg\neg A$

$\langle 4 \rangle$ montrons $\neg\neg A$
sans utiliser h

\dots

$\langle 4 \rangle$ CQFD

$\langle 3 \rangle$ CQFD (Af)

$\langle 4 \rangle$ montrons $\neg A$

$\langle 4 \rangle$ CQFD (Ax) avec h

$\langle 2 \rangle$ CQFD (E_{\neg})

$\langle 1 \rangle$ CQFD (Abs)

Règle dérivée : exemple (R_{\neg}^1)

