Langages logiques

Un langage logique est construit à partir de :

— un ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup ...$ de symboles de fonction, où $\mathcal{F}_0$ est l'ensemble des **constantes** et $\mathcal{F}_n$ est l'ensemble des symboles de **fonction** d'arité n, pour $n \geq 1$

— un ensemble $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1 \cup \ldots$ de symboles de **prédicat**, où $\mathcal{P}_0$ est l'ensemble des symboles de proposition et $\mathcal{P}_n$ est l'ensemble des symboles de prédicat d'arité n, pour $n \geq 1$

Langage logique sans variable

L'ensemble $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ des **termes** est défini inductivement par :

— si $k \in \mathcal{F}_0$ est un symbole de constante, alors k est un terme

— si $f \in \mathcal{F}_n$ est un symbole de fonction d'arité n, et si $t_1, \cdots, t_n$ sont des termes, alors $f(t_1, \cdots, t_n)$ est un terme

L'ensemble $\mathcal{L}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ des **formules atomiques** est défini par :

— si $p \in \mathcal{P}_0$ est un symbole de prédicat d'arité 0, alors p est une formule atomique

— si $p \in \mathcal{P}_n$ est un symbole de prédicat d'arité n et si $t_1, \cdots, t_n$ sont des termes de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, alors $p(t_1, \cdots, t_n)$ est une formule atomique

L'ensemble $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ des **formules logiques** est défini inductivement par :

— true et false sont des formules logiques

— si F est une formule atomique, alors F est une formule logique

— si F est une formule logique, alors $\neg F$ est une formule logique

— si F_1 et F_2 sont des formules logiques, alors $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$ et $(F_1 \Rightarrow F_2)$ sont des formules logiques

Langage logique avec variable

Soit X un ensemble de symboles de **variable**.

L'ensemble $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ des **termes** est défini inductivement par :

— si $x \in X$ est un symbole de variable, alors x est un terme

— si $k \in \mathcal{F}_0$ est un symbole de constante, alors k est un terme

— si $f \in \mathcal{F}_n$ est un symbole de fonction d'arité n, et si $t_1, \cdots, t_n$ sont des termes, alors $f(t_1, \cdots, t_n)$ est un terme

L'ensemble $\vartheta(t)$ des **variables apparaissant dans un terme** t est défini inductivement par :

$$\begin{array}{rcll} \vartheta(x) & = & \{x\} & (x \in X) \\ \vartheta(k) & = & \emptyset & (k \in \mathcal{F}_0) \\ \vartheta(f(t_1, \cdots, t_n)) & = & \vartheta(t_1) \cup \cdots \cup \vartheta(t_n) & (f \in \mathcal{F}_n) \end{array}$$

Définition inductive du terme $t[x := t']$ (**substitution** de la variable x par le terme t' dans t) :

$$\begin{array}{rcll} x[x := t'] & = & t' & (x \in X) \\ y[x := t'] & = & y & (y \in X \text{ et } x \neq y) \\ k[x := t'] & = & k & (k \in \mathcal{F}_0) \\ f(t_1, \cdots, t_n)[x := t'] & = & f(t_1[x := t'], \cdots, t_n[x := t']) & (f \in \mathcal{F}_n) \end{array}$$

L'ensemble $\mathcal{L}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ des **formules atomiques** est défini par :

— si $p \in \mathcal{P}_0$ est un symbole de prédicat d'arité 0, alors p est une formule atomique

— si $p \in \mathcal{P}_n$ est un symbole de prédicat d'arité n et si $t_1, \cdots, t_n$ sont des termes de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$, alors $p(t_1, \cdots, t_n)$ est une formule atomique

L'ensemble $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ des **formules logiques** est défini inductivement par :

— true et false sont des formules logiques

— si F est une formule atomique, alors F est une formule logique
— si F est une formule logique, alors $\neg F$ est une formule logique
— si F_1 et F_2 sont des formules logiques, alors $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$ et $(F_1 \Rightarrow F_2)$ sont des formules logiques
— si F est une formule et x un symbole de variable, alors $\forall x\, F$ et $\exists x\, F$ sont des formules

L'ensemble $\mathrm{Free}(F)$ des **variables libres** d'une formule est défini inductivement par :

$$\mathrm{Free}(F) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } F = \mathsf{true} \text{ ou } F = \mathsf{false} \\ \bigcup_{i=1}^{n} \vartheta(t_i) & \text{si } F = p(t_1, \cdots, t_n) \\ \mathrm{Free}(F') & \text{si } F = \neg F' \\ \mathrm{Free}(F_1) \cup \mathrm{Free}(F_2) & \text{si } F = F_1 \wedge F_2 \text{ ou } F = F_1 \vee F_2 \\ & \quad \text{ou } F = F_1 \Rightarrow F_2 \\ \mathrm{Free}(F') \backslash \{x\} & \text{si } F = \forall x\ F' \text{ ou } F = \exists x\ F' \end{cases}$$

Une occurrence de variable est **liée** si elle est dans la portées d'un quantificateur. Une **formule close** est une formule F telle que $\mathrm{Free}(F) = \emptyset$ et si $\mathrm{Free}(F) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ alors une **clôture universelle** de F est la formule $\forall x_1 \cdots \forall x_n\, F$.

Définition inductive de la formule $F[x := t]$ (formule F sur laquelle est appliquée la **substitution** de x par le terme t) lorsque les variables de $\vartheta(t)$ n'ont pas d'occurrences liées dans F (si cette condition n'est pas vérifiée il suffit de renommer les occurrences liées de F) :

$$\begin{array}{rcll} \mathsf{true}[x := t] & = & \mathsf{true} & \\ \mathsf{false}[x := t] & = & \mathsf{false} & \\ p(t_1, \cdots, t_n)[x := t] & = & p(t_1[x := t], \cdots, t_n[x := t]) & (p \in \mathcal{P}_n) \\ (\neg F_0)[x := t] & = & \neg(F_0[x := t]) & \\ (F_1 \wedge F_2)[x := t] & = & F_1[x := t] \wedge F_2[x := t] & \\ (F_1 \vee F_2)[x := t] & = & F_1[x := t] \vee F_2[x := t] & \\ (F_1 \Rightarrow F_2)[x := t] & = & F_1[x := t] \Rightarrow F_2[x := t] & \\ (\forall x\ F_0)[x := t] & = & \forall x\ F_0 & \\ (\forall y\ F_0)[x := t] & = & \forall y\ (F_0[x := t]) & (x \neq y) \\ (\exists x\ F_0)[x := t] & = & \exists x\ F_0 & \\ (\exists y\ F_0)[x := t] & = & \exists y\ (F_0[x := t]) & (x \neq y) \end{array}$$