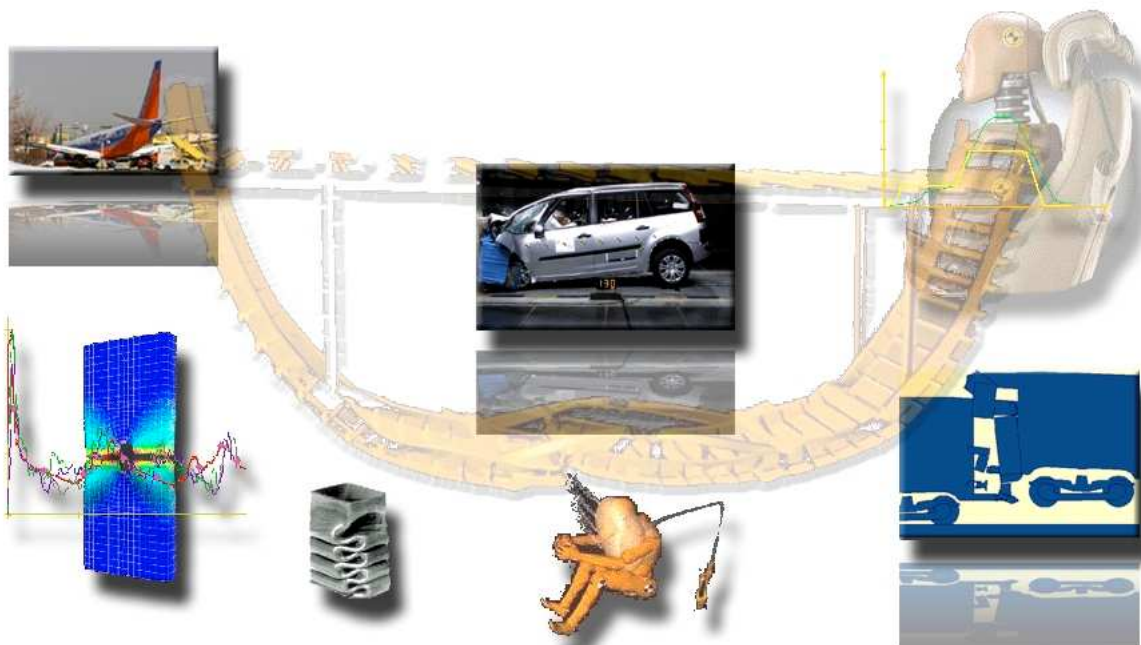


# L'Ingénierie du Crash

## Dans les VEHICULES de TRANSPORT



*Complément pdf*

### DETERMINATION ANALYTIQUE DES CARACTERISTIQUES D'EFFONDREMENT EN COMPRESSION AXIALE ET EN FLEXION PURE

Eric Markiewicz - V1.01 - Juillet 2007

Auteurs **Prof. Eric Markiewicz** **Dr Eric Weyenbergh** **Prof. Yves Ravalard** **Dr Bertrand Langrand**  
 Co-Auteurs **Prof. Daniel Coutellier** **Prof. Pascal Drazétic** **Dr. Eric Deletombe**

## NOTATIONS

$a$	longueur d'onde cinématique
$b'$	position du coin supérieur
$\dot{b}'$	vitesse de déplacement du coin supérieur dans la plaque
$A_o$	amplitude de la déformée dans le domaine post-critique
$b$	largeur de plaque
$b_2$	longueur de la plaque après projection dans le plan $\pi$
$C$	largeur de l'élément coin
$\mathbf{C}$	matrice constitutive du matériau
$E$	module d'Young
$E_s$	module sécant
$E_t$	module tangent
$H$	demi-longueur d'onde de pliage plastique
$L$	longueur de la plaque
$l_i$	longueur de la $i^{\text{ème}}$ ligne de pliage inclinée mobile
$L^{(i)}$	longueur de la $i^{\text{ème}}$ ligne de pliage
$m$	coefficient d'écrouissage
$\mathbf{M}_{em}$	matrice définie par les énergies de membrane
$\mathbf{M}_{ef}$	matrice définie par les énergies de flexion
$\mathbf{M}_{ext}$	matrice définie par le chargement extérieur
$M_o^{(i)}$	moment de flexion parfaitement plastique (par unité de longueur)
$M_{\alpha\beta}$	moment de flexion dans les zones continûment déformées
$N_{ij}$	nombre de contributions énergétiques du modèle mixte généralisé
$n_{hl}$	nombre total de lignes de pliage
$np$	nombre de plaques constituant le profilé
$N_{\alpha\beta}$	effort de membrane dans les zones continûment déformées
$P$	effort instantané d'écrasement
$P_{cin}$	effort de compression cinématique
$P_{\text{élastoplast}}^+$	Effort de compression élastoplastique
$P_{\text{élastoplast}}^-$	Effort de tension élastoplastique
$P_{cr}$	effort critique de flambement élastique
$P_m$	effort moyen d'écrasement
$P_{sq}$	squash load (effort pour une section non déformée totalement plastifiée)
$P_{total}$	effort total dans la section
$P_u$	effort ultime quasi-statique d'effondrement
$r$	petit rayon de la surface toroïdale
$R$	grand rayon de la surface toroïdale
$S$	section
$t$	épaisseur de la plaque
$u$	champ de déplacement en compression
$U_f$	énergie de flexion
$U_m$	énergie de membrane
$v$	champ de déplacement transverse
$V_o$	variation de longueur
$V_t$	vitesse tangentielle

$w$	champ de déplacement en flexion
$w_o$	amplitude initiale du déplacement en flexion
$\bar{w}$	champ d'imperfection latérale
$\bar{w}_o$	amplitude initiale d'imperfection latérale
$w_{eq}$	déplacement équivalent en flexion pour une plaque de largeur unitaire
$\bar{w}_{eq}$	amplitude initiale d'imperfection latérale équivalente pour une plaque de largeur unitaire
$\dot{W}_{int}$	puissance interne dissipée
$\dot{W}_{ext}$	puissance externe
$\bar{\alpha}$	angle de basculement entre les deux mécanismes de pliage
$\alpha_f$	angle de pliage final
$\chi$	vecteur sortie des paramètres inconnus ( $r, H, \bar{\alpha}$ )
$\dot{\delta}$	vitesse relative de raccourcissement uniforme des bords de l'élément coin
$\delta_{eff}$	distance d'écrasement effective du premier lobe
$\delta_i$	distance d'écrasement imposé
$\tilde{\epsilon}$	vecteur des déformations
$\tilde{\kappa}$	vecteur des courbures
$\epsilon_y$	déformation à la limite élastique
$\epsilon_c$	déformation en cisaillement du joint de colle
$\epsilon_{cr}$	déformation critique de flambement plastique
$\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}$	tenseur des vitesses de déformation
$\lambda$	longueur d'onde de flambement élasto-plastique
$\dot{\kappa}_{\alpha\beta}$	tenseur des vitesses de courbure
$\theta_o$	angle de rotation de la section
$\theta$	demi-angle de pliage de la rotule
$\dot{\theta}$	demi-vitesse angulaire de pliage de la rotule
$\dot{\Theta}^{(i)}$	vitesse de rotation à travers la <i>i</i> ème ligne de pliage mobile
$\psi$	inclinaison de la plaque
$\psi_2$	inclinaison de la plaque après projection dans le plan $\pi$
$\rho_1$	inclinaison du bord supérieur déformé de la plaque
$\rho_2$	inclinaison du bord inférieur déformé de la plaque
$\sigma_{cr}$	contrainte critique de flambement plastique
$\sigma_u$	contrainte ultime conventionnelle en traction (UTS)
$\sigma_o$	contrainte énergétique équivalente
$\tau$	raccourcissement dû à la flexion du bord
$\nu$	coefficient de Poisson
$\rho$	masse volumique
$\Omega$	angle de pliage entre les facettes de la ligne stationnaire
$2\Psi_o$	angle entre les deux plaques adjacentes de l'élément coin

## 1. Approche globale : Dynamique des SMA

Cette approche repose sur la constatation suivante : lors d'un choc, les composants structuraux ne se comportent pas tous de la même façon. Certains éléments se déforment beaucoup plus que d'autres. Les parties qui ne se déforment peu ou pas peuvent donc être assimilées à des solides rigides ou flexibles. Cette approche, fondée sur la théorie des Systèmes Mécaniques Articulés, a pour objectif de simuler ces phénomènes par des modèles discrets, en utilisant des éléments simples afin de représenter un composant ou un sous-ensemble de composants.

Une structure est modélisée par un ensemble de corps reliés entre eux par l'intermédiaire de liaisons représentant les zones qui subissent de grandes déformations. De manière générale, en vue de bâtir les modèles, la démarche suivante est adoptée :

- les déformations dont le comportement global est axial, sont modélisées par un joint prismatique couplé avec un ressort de translation,
- les déformations engendrant un comportement global bi- voire tridimensionnel, sont modélisées par un joint de rotation en 2D ou un joint de révolution en 3D couplé à un ou plusieurs ressorts de rotation.

Le fait de ne s'intéresser qu'aux zones concernées par la déformation procure à cette méthode un caractère rapide dans la modélisation et l'exécution du calcul. Même dans le cas de structures relativement complexes, les temps de réponse sont généralement courts. Cet outil est donc parfaitement adapté pour le dimensionnement au choc des structures.

Cependant, ces outils requièrent l'introduction des caractéristiques non-linéaires propres à chacune des liaisons déformables. Les lois caractérisant le comportement des ressorts, axial et de rotation, sont respectivement la courbe "effort – écrasement axial" et la courbe "moment - angle de pliage".

Les véhicules de transport sont pour la plupart constitués à partir de profilés à parois minces assemblés par soudure par points ou continue, ou encore par rivetage. En situation de collision, nous assistons à la formation de mécanismes de pliage, générés par une instabilité locale, qui se traduisent purement et simplement par l'effondrement de la structure.

Les caractéristiques "effort – écrasement axial" et "moment - angle de pliage" peuvent être obtenues à l'aide de calculs par éléments finis en statique non-linéaire, en flambement ou encore expérimentalement. Toutes ces méthodes, coûteuses en temps de préparation et d'exploitation, font perdre tout intérêt à l'approche globale. L'utilisateur doit disposer d'un outil efficace lui permettant de définir le plus rapidement possible les courbes de comportement des ressorts de translation et de rotation.

C'est la raison pour laquelle, afin d'obtenir rapidement la courbe d'effondrement en compression axiale et en flexion pure d'un profilé à parois minces, nous nous sommes orientés vers des méthodes analytiques fondées sur la théorie du flambement et les modèles cinématiques. Un modèle cinématique est la représentation mathématique des phénomènes physiques associés au mécanisme de pliage. Sa formulation théorique, fondée à partir du théorème de l'analyse limite, fournit une solution de type borne supérieure. Cette méthode est due aux travaux pionniers de Kecman pour la flexion plane [KEC 79], [KEC 83a], [KEC 83b] et de Wierzbicki et

Abramowicz pour la compression axiale [WIE 83], [ABR 84], [ABR 86], [WIE 89a], [WIE 89b]. L'intérêt des modèles analytiques, par rapport aux éléments finis, réside à la fois dans la souplesse de mise en données et d'utilisation, et par conséquent dans le gain de temps que ces modèles apportent dans le processus de conception.

## 2. Compression Axiale

Les déformations d'une structure linéique à parois minces sont dues à des chargements de compression et de flexion. Comme l'indique la Figure 1, la réponse typique d'une colonne prismatique se décompose en trois phases identifiées par le pré-effondrement, l'effondrement et le post-effondrement.

La phase de pré-effondrement, qui correspond principalement aux déformations élastiques ou élasto-plastiques, fait intervenir, dans un premier temps, la compression uniforme qui détermine la position d'équilibre. Dans un deuxième temps, après bifurcation de cet état d'équilibre, intervient le post-flambement où chaque plaque est soumise à des chargements de compression et de flexion. Pour des structures à section transversale épaisse, des déformations plastiques peuvent apparaître avant l'instabilité de flambement. Dans ce cas, la compression uniforme est suivie par une compression plastique jusqu'à l'apparition de l'instabilité. Au point d'effondrement, la colonne atteint sa charge ultime (pic). Au delà, caractérisée par la phase de post-effondrement, la colonne subit de grandes déformations latérales qui provoquent la chute de l'effort instantané. Comme l'effondrement en compression axial est caractérisé par la formation de plusieurs lobes plastiques tout au long de la colonne, un effort moyen à l'écrasement  $P_m$  peut alors être extrait.

La présente démarche restitue séparément chaque étape du processus de déformation de sorte qu'une caractéristique entière d'écrasement est définie pour des sections à parois minces métalliques de géométrie prismatique complexe.

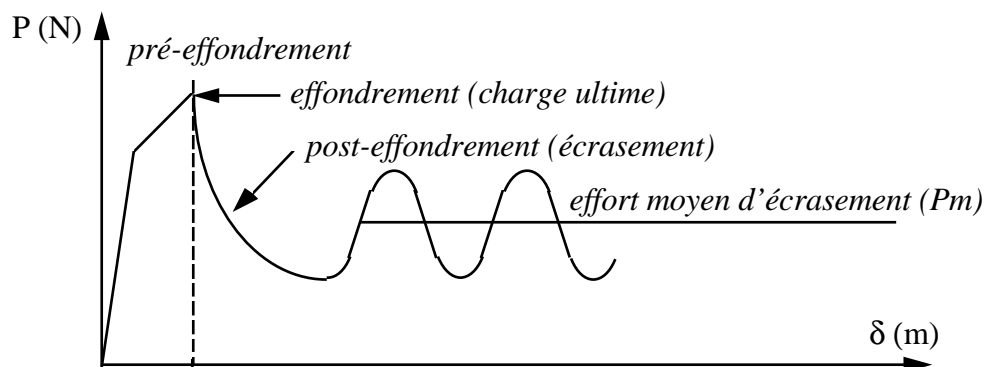


Figure 1. Caractéristiques d'écrasement d'une colonne prismatique.

### 2.1. Phases de pré-effondrement et d'effondrement

Une plaque isolée, simplement appuyée dans la direction du chargement, est considérée. La charge ultime varie selon la géométrie, les propriétés matérielles et selon le mode de flambement, ce mode de flambement pouvant être initié par des imperfections.

Dans les tests et les simulations, deux modes d'écrasement apparaissent généralement, le mode asymétrique (Fig.2a) et le mode symétrique (Fig.2b). Dans le cas d'un mode asymétrique,

les bords libres de cette plaque sont considérés comme rotulés (Fig.3). Ils sont considérés comme encastrés si le mode d'écrasement est symétrique.

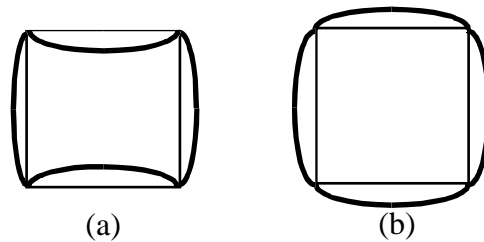


Figure 2. Modes de flambement d'une colonne prismatique a- asymétrique b- symétrique.

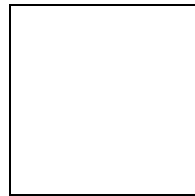


Figure 3. (a) Champ de déplacement en compression pour une plaque de longueur L;

(b) Champ de déplacement en flexion pour une plaque de longueur égale à une demi-longueur de flambement.

Cependant, dans le cas des absorbeurs de chocs axiaux, la prise en compte des imperfections géométriques initiales et surtout des imperfections bénéfiques, encore appelées « triggering mechanisms », est primordiale pour la détermination du pic d'effort qui conditionnera les niveaux de décélérations subis par les passagers.

Dans ce cours, seul le calcul du mode d'écrasement asymétrique sous chargement quasi-statique et dynamique est présenté avec prise en compte d'imperfections géométriques initiales. La généralisation au mode d'écrasement symétrique pour des profilés monotubulaires ou multitubulaires à épaisseurs simples ou multiples et sous chargements quasi-statique ou dynamique, est disponible dans la littérature scientifique, en particulier dans les références suivantes [MAR 94a], [DRA 95], [MAR 96a].

### 2.1.1. Chargement quasi-statique

La relation effort-déplacement d'une simple plaque en phase de pré-flambement s'exprime :

$$\frac{P}{b t} = \frac{E u_0}{1-\nu^2 L} \quad \text{avec} \quad L = n.H_{el} = n\frac{b}{2} \quad (1)$$

où,  $P$  est l'effort de compression,  $E$  est le module d'Young,  $b$  est la largeur de la plaque et  $t$  son épaisseur,  $L$  est la longueur de la plaque qui correspond au produit de  $n$ , le nombre de lobes initiés en phase de pré-effondrement, par la demi longueur d'onde  $H_{el}$  de flambement élastique,  $u_0$  correspond au déplacement uniforme initial et  $\nu$  au coefficient de Poisson.

Pour un assemblage de  $np$  plaques, l'effort de compression s'exprime :

$$P = \frac{E}{1-\nu^2} u_0 \sum_{i=1}^{np} \frac{b_i t_i}{L} \quad (2)$$

La phase de compression a lieu jusqu'à l'instabilité qui provoque des déplacements dus à l'apparition de la flexion. Ces déplacements font diminuer la rigidité de la plaque. Mais la

structure peut continuer à supporter des efforts supplémentaires suivant la droite de post-flambement.

Les expressions suivantes, pour les champs de déplacement en compression et en flexion satisfaisant les conditions aux limites, sont utilisées :

$$u = -u_o \frac{x}{L} \quad (3)$$

$$w = w_o \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (4)$$

$$\bar{w} = \bar{w}_o \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (5)$$

où,  $u_o$  est l'amplitude maximale due à la compression,  $L$  est la longueur de la plaque,  $w_o$  est l'amplitude maximale due à la flexion,  $b$  est la largeur de la plaque et  $n$  est le nombre de lobes élastiques. Le champ de déplacement en flexion additionnel,  $\bar{w}$ , représente l'imperfection géométrique initiale.

Les expressions précédentes concernent l'étude d'une plaque isolée. Cependant, une colonne peut être considérée comme un assemblage de  $np$  plaques reliées par leurs conditions aux frontières. Chaque plaque ajoutée donne une inconnue supplémentaire  $w_{oi}$ . Néanmoins, l'hypothèse de continuité des déplacements aux coins, représentée Fig. 4, permet de diminuer le nombre de paramètres. Nous pouvons donc généraliser le champ de déplacement dû à la flexion pour une plaque indicée  $i$  :

$$w = w_{oi} \sin\left(\frac{\pi}{b_i} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (6)$$

En se plaçant sur une ligne de coin ( $y=0$ ), la pente s'exprime :

$$\frac{\partial w_i}{\partial y_i} = \frac{w_{oi}}{b_i} \pi \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (7)$$

, et avec l'hypothèse de continuité de la pente, nous en déduisons que, quelle que soit la plaque  $i$  de l'assemblage :

$$\frac{w_{oi}}{b_i} = w_{eq} = \text{Constante} \quad (8)$$

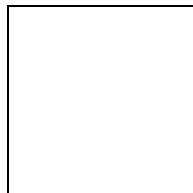


Figure 4. Hypothèse de continuité des pentes.

En introduisant le paramètre  $w_{eq}$ , l'énergie potentielle totale s'écrit :

$$\Pi = U_f(w_{eq}) + U_m(u_o, w_{eq}) - Pu_o \quad (6)$$

Les deux premiers termes du second membre de la relation (6) représentent le travail des efforts intérieurs provoqués par la flexion et l'action de la membrane, et le troisième terme correspond au travail des efforts extérieurs.

Les énergies de flexion et de membrane sont exprimées par les relations :

$$U_f = \frac{1}{2} \int_V z_2 \tilde{\mathbf{K}}_T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{K}} dV \quad (7)$$

$$U_m = \frac{1}{2} \int_V \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_T \mathbf{C} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} dV \quad (8)$$

$$\text{où, } \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yy} \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy} \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} -w_{,xx} + \bar{w}_{,xx} \\ -w_{,yy} + \bar{w}_{,yy} \\ -2w_{,xy} + 2\bar{w}_{,xy} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}$  et  $\mathbf{C}$  représentent respectivement le vecteur des déformations, le vecteur des courbures et la matrice constitutive du matériau en contraintes planes.

Dans le cas où la déformation du profilé en phase de pré-effondrement ne respecte pas les hypothèses de petites perturbations, le tenseur de Green-Lagrange doit être utilisé pour formuler le champ de déformation :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla U + \nabla U_t + \nabla U \nabla U_t] \quad (10)$$

Les composantes de la déformation de la surface moyenne pour des plaques à très grandes flèches et imperfections initiales s'écrivent donc :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \quad (13)$$

La condition d'équilibre  $\delta \Pi = 0$  donne l'effort de post-flambement  $P$  et une équation couplant les déplacements en compression et ceux en flexion. Il s'agit d'une condition stationnaire où les variations de  $u_o$  et  $w_{eq}$  sont indépendantes :

$$P = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[ \left( \frac{u_o^3}{L^3} - 3 \frac{u_o^2}{L^2} + 2 \frac{u_o}{L} \right) \sum_{i=1}^{np} t_i b_i \right. \\ \left. + \frac{\pi^2}{4} (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2) \left[ \frac{n^2}{L} \left( \frac{u_o}{L^2} - \frac{1}{L} \right) \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^3 + \nu \left( \frac{u_o}{L} - 1 \right) \sum_{i=1}^{np} t_i b_i \right] \right] \quad (14)$$



$$\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[ \begin{aligned} & \frac{\pi^4 L}{24} (w_{eq} - \bar{w}_{eq}) \sum_{i=1}^{np} t_i^3 b_i \left( \frac{1}{b_i} + \frac{n^2 b_i}{L^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\pi^2 n^2}{L} \left( \frac{1}{2} \frac{u_o^2}{L^2} - \frac{u_o}{L} \right) w_{eq} \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^3 \\ & + \frac{9}{64} \frac{\pi^4 n^4}{L^3} w_{eq} (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2) \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^5 + \frac{9}{64} \pi^4 L w_{eq} (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2) \sum_{i=1}^{np} t_i b_i \\ & + 2\nu \left[ \frac{\pi^2}{4} \left( \frac{1}{2} \frac{u_o^2}{L} - u_o \right) w_{eq} \sum_{i=1}^{np} t_i b_i + \frac{1}{64} \frac{\pi^4 n^2}{L} w_{eq} (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2) \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^3 \right] \\ & + \frac{1}{32} (1-\nu) \frac{\pi^4 n^2}{L} w_{eq} (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2) \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^3 \end{aligned} \right] = 0 \quad (15)$$

Dans le cas d'une colonne parfaite, le déplacement critique,  $u_{cr}$ , est obtenu pour un déplacement latéral nul ( $w_{eq} = \bar{w}_{eq} = 0$ ). La substitution de  $u_{cr}$  dans l'expression de  $P$  fournit le chargement critique pour un flambement élastique  $P_{cr}$ . Lorsque la colonne est de forte épaisseur, la section peut être entièrement plastifiée avant d'atteindre la valeur critique de flambement élastique. En effet, la capacité maximale de dissipation d'énergie plastique par une section non déformée est représentée par le «squash load» ;  $P_{sq} = \sigma_o b t$  avec,  $\sigma_o$  la limite élastique du matériau,  $b$  la largeur de la plaque et  $t$  l'épaisseur.

- Par conséquent :
- si  $P_{cr} < P_{sq}$  le flambement est élastique,
  - si  $P_{cr} > P_{sq}$  le flambement est plastique.

si  $P_{cr} < P_{sq}$ , la réponse en compression uniforme est suivie de la phase de post-flambement qui est en relation avec le champ de déplacement axial,  $u$ , et le champ de déplacement latéral normé,  $w_{eq}$ . La charge maximale,  $P_u$ , est obtenue en utilisant le critère de plasticité de von Mises en contraintes planes :

$$\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + 3\sigma_{xy}^2 = \sigma_o^2 \quad (16)$$

Le premier point de plastification  $P_u$  apparaît sur les lignes de coin et à hauteur d'une demi-longueur d'onde de flambement. Suite à l'équation (16), le critère s'exprime :

$$\frac{(1-\nu+\nu^2)}{(1-\nu^2)^2} \frac{u_o^2}{L^2} + \frac{1}{4} \frac{(1-\nu+\nu^2)}{(1-\nu^2)^2} \pi^4 w_{eq}^4 + \frac{1}{2} \frac{(1-4\nu+\nu^2)}{(1-\nu^2)^2} \pi^2 \frac{u_o}{L} w_{eq}^2 = \left( \frac{\sigma_o}{E} \right)^2 \quad (17)$$

- Si  $P_{cr} > P_{sq}$ , les déformations plastiques apparaissent avant l'instabilité élastique et la compression uniforme est alors suivie d'une compression plastique jusqu'au flambement plastique, où l'apparition de déplacements transversaux provoquent la ruine de la colonne. Suivant cette dernière procédure, la théorie unifiée du flambement plastique de Stowell [STO 48] [GER 62], pour une plaque parfaite avec une condition d'incompressibilité du matériau, est utilisée pour déterminer la contrainte critique de flambement plastique,  $\sigma_{cr}$ .

Dans la région élastique, les contraintes et déformations sont linéairement reliées par le module élastique. Au-delà de la limite de proportionnalité, la relation suivante peut être utilisée :

$$\sigma = E_s \varepsilon \quad (18)$$

, où  $E_s$  est le module sécant.

Durant le processus de flambement, l'état de contrainte est considérablement plus complexe que le simple chargement uni axial induit par la relation (18). Par conséquent, la formulation de lois contrainte-déformation appropriées pour des états de contraintes beaucoup plus complexes est une des hypothèses de base de la théorie de la plasticité. Dans le cas des plaques minces, les relations contrainte-déformation plastique suivantes remplacent les relations élastiques habituelles :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E_s} \left( \sigma_{xx} - \frac{1}{2} \sigma_{yy} \right) \quad (19)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E_s} \left( \sigma_{yy} - \frac{1}{2} \sigma_{xx} \right) \quad (20)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{3}{E_s} \tau_{xy} \quad (21)$$

Dans les équations (19) à (21)  $\nu=1/2$ , ce qui implique que le matériau sous état de plasticité est considéré incompressible. En termes de contraintes, ces relations prennent la forme suivante :

$$\sigma_{xx} = \frac{4}{3} E_s \left( \varepsilon_{xx} + \frac{1}{2} \varepsilon_{yy} \right) \quad (22)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{4}{3} E_s \left( \varepsilon_{yy} + \frac{1}{2} \varepsilon_{xx} \right) \quad (23)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E_s}{3} \gamma_{xy} \quad (24)$$

Au point de flambement d'une plaque sous chargement axial, un état de contrainte relativement complexe associé à des déformations latérales se superpose au simple état de contrainte de compression uniaxial. Du fait du caractère non-linéaire des relations contrainte-déformation, il est important de distinguer les états de contraintes de pré-flambement et de post-flambement.

Jusqu'au point de flambement, la plaque est comprimée par une contrainte axiale  $\sigma_{xx}$  dans le domaine plastique. Comme  $\sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0$ ,  $\varepsilon_{yy} = -1/2 \varepsilon_{xx}$  et l'équation (22) se réduit à :

$$\sigma_{xx} = E_s \varepsilon_{xx} \quad (25)$$

Juste après que le flambement soit apparu, les composantes incrémentales de contrainte et déformation ne diffèrent que très peu de l'état de contrainte uni axial du pré-flambement. En utilisant la relation (22), nous pouvons donc exprimer la variation de contrainte axiale :

$$\delta \sigma_{xx} = \frac{4}{3} E_s \left( \delta \varepsilon_{xx} + \frac{1}{2} \delta \varepsilon_{yy} \right) + \frac{4}{3} \left( \varepsilon_{xx} + \frac{1}{2} \varepsilon_{yy} \right) \delta E_s \quad (26)$$

où,

$$\delta E_s = \frac{\delta \sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{1}{\varepsilon_{xx}} \delta \sigma_{xx} - \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}^2} \delta \varepsilon_{xx} = \left( \frac{\delta \sigma_{xx}}{\delta \varepsilon_{xx}} - \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} \right) \frac{\delta \varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xx}} = (E_t - E_s) \frac{\delta \varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xx}} \quad (27)$$

En substituant (27) dans (26) et en utilisant les relations (22) et (25),  $\delta \sigma_{xx}$  devient :

$$\delta\sigma_{xx} = \frac{4}{3}E_s \left[ \left( \frac{1}{4} + \frac{3E_t}{4E_s} \right) \delta\varepsilon_{xx} + \frac{1}{2} \delta\varepsilon_{yy} \right] \quad (28)$$

où,

$$\delta\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (29)$$

$$\delta\varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (30)$$

La relation moment-déplacement s'exprime par :

$$M_{xx} = \int_{-t/2}^{t/2} \delta\sigma_{xx} z dz \quad (31)$$

En y remplaçant les équations (28) à (30) et en intégrant :

$$M_{xx} = -\frac{E_s t^3}{9} \left[ \left( \frac{1}{4} + \frac{3E_t}{4E_s} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (32)$$

En procédant de la même manière, nous obtenons  $M_{yy}$  et  $M_{xy}$  :

$$M_{yy} = -\frac{E_s t^3}{9} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (33)$$

$$M_{xy} = -\frac{E_s t^3}{18} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (34)$$

L'équation d'équilibre d'une plaque mince, reportée, entre autres, par Ilyushin [ILY 47], s'exprime par :

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = - \left( N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (35)$$

En dérivant l'expression des moments  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$ ,  $M_{xy}$  et en particulierisant le problème pour une plaque comprimée dans la direction x ( $N_{yy}=N_{xy}=0$  et  $N_{xx}=\sigma$ ), l'équation d'équilibre (35) devient :

$$\left( \frac{1}{4} + \frac{3E_t}{4E_s} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{9}{E_s t^2} \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (36)$$

La solution de l'équation (36), pour une plaque sous état plastique, simplement supportée, plane et rectangulaire, est obtenue de la même manière que pour une plaque élastique. En utilisant le champ de déformation en flexion  $w$  de la relation (6) et en prenant  $n=1$ , nous obtenons l'expression suivante de la contrainte critique de flambement plastique :

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2}{9} E_s \left( \frac{t}{b} \right)^2 \left[ 2 + \sqrt{1 + 3 \frac{E_t}{E_s}} \right] \quad (37)$$

Dans ce cas, la matrice constitutive du matériau s'exprime :

$$\mathbf{C} = \frac{4}{3} E_s \begin{bmatrix} C_1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad \text{où, } C_1 = \frac{1}{4} + \frac{3 E_t}{4 E_s} \quad (38)$$

Pour déterminer le module sécant,  $E_s$ , et le module tangent,  $E_t$ , la courbe de contrainte-déformation est idéalisée par le modèle élasto-plastique suivant :

$$\sigma = \sigma_o \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} \right)^m \quad (39)$$

où,  $\varepsilon_o$  est la déformation à la limite élastique  $\sigma_o$ ,  $\varepsilon$  est la déformation courante et  $m$  le coefficient d'érouissage du matériau. Par conséquent :

$$E_t = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \sigma \frac{\varepsilon^{m-1}}{\varepsilon_o^m} \quad \text{et} \quad E_s = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = m \sigma_o \frac{\varepsilon^{m-1}}{\varepsilon_o^m} \quad (40)$$

La charge ultime est donc égale à la somme de chacune des charges sur les plaques isolées constituant la section :

$$P_u = \sum_{i=1}^{np} \sigma_{cr,i} t b \quad (41)$$

où,  $np$  est le nombre de plaques constituant la section.

Dans le cas d'une colonne imparfaite, matérialisée par l'amplitude initiale  $\bar{w}_{eq}$ , la notion d'instabilité élastique pour un déplacement latéral nul n'a plus de sens et nous ne pouvons extraire une valeur instantanée de  $P_{cr}$  pour la comparer à  $P_{sq}$ .

Nous proposons la solution algorithmique suivante :

- Step 1 – Evolution de  $u_o$  comme paramètre,
- Step 2 – Extraction d'une valeur de  $w_{eq}$  de l'équation (15),
- Step 3 – Utilisation de  $u_o$  et  $w_{eq}$  dans l'équation (14),  
Extraction d'une valeur courante de la charge  $P$ ,
- Step 4 – Comparaison de la charge courante  $P$  avec le « squash load »  $P_{sq}$ ,
- Step 5a – Cas où,  $P < P_{sq}$  : post-flambement élastique,

Recherche du premier point de plastification avec le critère de von Mises en contraintes planes appliqué aux colonnes avec imperfections initiales (Eqn. 42),

. Si le critère est satisfait : STOP

L'équation (14) avec les valeurs courantes de  $u_o$  et  $w_{eq}$  détermine le niveau

de la charge ultime de flambement,  $P_u$ .

. Si le critère n'est pas satisfait : RETOUR à Step 1 et incrémentation de la valeur de  $u_o$ .

$$\begin{aligned} & (1 - \nu + \nu^2) \frac{u_o^2}{L^2} + \frac{\pi^4}{4} (1 - \nu + \nu^2) (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2)^2 + \\ & \frac{\pi^2}{2L} (1 - 4\nu + \nu^2) u_o (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2) = \left( \frac{\sigma_o (1 - \nu^2)}{E} \right)^2 \end{aligned} \quad (42)$$

Step 5b – Cas où,  $P > P_{sq}$  : flambement plastique,

Recours à la condition d'incompressibilité ( $\nu = 1/2$ ) et expression de la matrice constitutive du matériau,  $\mathbf{C}$ , pour un état de contrainte plastique (Eqn. 38). Les énergies de flexion et de membrane sont ré-exprimées et la condition d'équilibre  $\delta\Pi = 0$  donne l'effort de flambement plastique  $P$  et une équation couplant les déplacements en compression et ceux en flexion (Eqns. 43 et 44).

$$P = \frac{2}{3} E_s \left[ C_1 \left( \frac{u_o^3}{L^3} - 3 \frac{u_o^2}{L^2} + 2 \frac{u_o}{L} \right) \sum_{i=1}^{np} t_i b_i + \frac{1}{4} \frac{C_1 \pi^2 n^2}{L} (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2) \left( \frac{u_o}{L^2} - \frac{1}{L} \right) \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^3 \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \pi^2 (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2) \left( \frac{u_o}{L} - 1 \right) \sum_{i=1}^{np} t_i b_i \right] \quad (43)$$

$$\frac{2}{3} E_s \left[ \frac{\pi^4 L}{24} (w_{eq} - \bar{w}_{eq}) \sum_{i=1}^{np} t_i^3 b_i \left( \frac{C_1 n^4 b_i^2}{L^4} + \frac{1}{b_i^2} + \frac{2n^2}{L^2} \right) \right. \\ + \frac{1}{2} \frac{C_1 \pi^2 n^2}{L} \left( \frac{1}{2} \frac{u_o^2}{L^2} - \frac{u_o}{L} \right) w_{eq} \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^3 \\ + \frac{9}{64} \frac{C_1 \pi^4 n^4}{L^3} w_{eq} (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2) \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^5 + \frac{9}{64} \pi^4 L w_{eq} (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2) \sum_{i=1}^{np} t_i b_i \\ \left. + \frac{1}{4} \pi^2 \left( \frac{1}{2} \frac{u_o^2}{L} - u_o \right) w_{eq} \sum_{i=1}^{np} t_i b_i + \frac{1}{32} \frac{\pi^4 n^2}{L} w_{eq} (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2) \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^3 \right] = 0 \quad (44)$$

Utilisation du théorème de Lejeune-Dirichlet qui postule que l'équilibre est instable si la variation seconde de l'énergie potentielle totale est nulle. L'application de ce théorème donne lieu à deux nouvelles équations de couplage entre les déplacements axiaux et transversaux (Eqns. 45 et 46). La première des équations qui est satisfaite détermine le point de flambement plastique.

. Si le critère est satisfait : STOP

L'équation (43) avec les valeurs courantes de  $u_o$  et  $w_{eq}$  détermine le niveau de la charge critique de flambement plastique,  $P_{cr}$ .

. Si le critère n'est pas satisfait : RETOUR à Step 1 et incrémentation de la

valeur de  $u_o$ .

$$\frac{2}{3} E_s \left[ C_1 \left( 3 \frac{u_o^2}{L^3} - 6 \frac{u_o}{L^2} + \frac{2}{L} \right) \sum_{i=1}^{np} t_i b_i + \frac{1}{4} \frac{C_1 \pi^2 n^2}{L^3} (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2) \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^3 \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \frac{\pi^2}{L} (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2) \sum_{i=1}^{np} t_i b_i \right] = 0 \quad (45)$$

$$\frac{2}{3} E_s \left[ \frac{\pi^4 L}{24} \sum_{i=1}^{np} t_i^3 b_i \left( \frac{C_1 n^4 b_i^2}{L^4} + \frac{1}{b_i^2} + \frac{2n^2}{L^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{C_1 \pi^2 n^2}{L} \left( \frac{1}{2} \frac{u_o^2}{L^2} - \frac{u_o}{L} \right) \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^3 \right. \\ \left. + (3w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2) \left[ \frac{9}{64} \frac{C_1 \pi^4 n^4}{L^3} \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^5 + \frac{9}{64} \pi^4 L \sum_{i=1}^{np} t_i b_i + \frac{1}{32} \frac{\pi^4 n^2}{L} \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^3 \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \pi^2 \left( \frac{1}{2} \frac{u_o^2}{L} - u_o \right) \sum_{i=1}^{np} t_i b_i \right] = 0 \quad (46)$$

### 2.1.2. Chargement dynamique

Les hypothèses fondamentales généralement admises sont que :

- il n'y a pas apparition de déchargements élastiques,
- pour des structures métalliques telles que poutres et plaques, soumises à de faibles vitesses d'impact ( $< 30 \text{ ms}^{-1}$ ), le mode de flambement observé est celui du premier mode, soit le mode statique. Dans le cas du crash des véhicules de transport cette condition est vérifiée. Les modes de flambement dynamique susceptibles d'apparaître sont identiques à ceux présentés précédemment,
- les effets d'inertie axiale des plaques et coques sont négligés lorsque la vitesse de chargement est petite devant celle des ondes élastiques, ce qui est vérifié.

Sur la base de ces hypothèses, nous procédons identiquement au cas du chargement quasi-statique, en partant d'une plaque simplement appuyée dans la direction du chargement. Seul le cas de flambement dynamique asymétrique est également considéré à la suite.

Au moment de l'impact, la colonne est dans un premier temps soumise à une compression axiale uniforme qui définit le premier chemin d'équilibre. La bifurcation de cet état d'équilibre est provoquée par l'instabilité du système inhérente à la prise en compte d'une imperfection géométrique initiale. Deux types de comportement en flambement peuvent alors apparaître, soit élastique, soit plastique.

Comme reporté par Wierzbicki [WIE 89], les équations de la dynamique sont dérivées du principe énergétique où les forces de d'Alembert sont traitées comme des efforts extérieurs connus et invariants. La fonctionnelle  $\Pi$  de l'énergie potentielle totale du système, tenant compte de l'inertie des faces latérales et de l'inertie de l'impacteur, prend la forme suivante :

$$\Pi = U_f + U_m - \sum_{i=1}^{np} \int (-m p_i \ddot{w}) w ds - (-M \ddot{u}_o) \quad (47)$$

où,  $m p_i$  est la masse par unité de surface de la  $i$ ème plaque et  $M$  est la masse de l'impacteur. Les énergies de flexion  $U_f$  et de membrane  $U_m$ , pour un assemblage de  $np$  plaques, sont issues du paragraphe précédent. Dans l'expression (47), l'inertie axiale de la plaque a été

négligée, ce qui est autorisé pour des vitesses d'impact relativement faibles ( $< 30 \text{ ms}^{-1}$ ) auxquelles nous avons affaire dans le domaine du crash des véhicules de transport.

D'après le théorème des travaux virtuels, l'état d'équilibre de la plaque correspond aux valeurs de  $u_o$  et  $w_{eq}$  qui minimisent cette fonctionnelle  $\Pi$  :

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial u_o} \delta u_o + \frac{\partial \Pi}{\partial w_{eq}} \delta w_{eq} = 0 \quad (48)$$

Il s'agit d'une condition stationnaire où les variations de  $u_o$  et  $w_{eq}$  sont indépendantes et qui donne lieu à un système de deux équations différentielles non-linéaires. Ce système est résolu numériquement avec les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} u_o(t=0) &= 0 & , & \quad w_{eq}(t=0) = \bar{w}_{eq} \\ \dot{u}_o(t=0) &= V_o & , & \quad \dot{w}_{eq}(t=0) = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

où,  $\bar{w}_{eq}$  correspond à l'imperfection géométrique initiale pour une plaque de largeur unitaire.

Les comportements de flambement élastique et plastique peuvent être traités à l'aide d'un système unique paramétré en  $\nu$ ,  $E_s$  et  $E_t$ . Dans le cas élastique,  $\nu=0,3$  pour les aciers et  $E_s=E_t=E$ . Dans le cas plastique, avec la condition d'incompressibilité  $\nu=0,5$  et pour  $E_s$  et  $E_t$ , nous utilisons un modèle élasto-plastique. Cependant, pour des raisons de clarté, nous avons jugé préférable de traiter séparément les deux types de comportement matériel.

### Comportement élastique

Les énergies de flexion et de membrane, pour un assemblage de  $np$  plaques avec imperfection géométrique initiale, sont exprimées par :

$$U_f = \frac{1}{96} \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right) \pi^4 L (w_{eq} - \bar{w}_{eq})^2 \sum_{i=1}^{np} t_i^3 b_i \left[ \frac{1+n^2 b_i}{L^2} \right]^2 \quad (50)$$

$$\begin{aligned} U_m = \frac{E}{2(1-\nu^2)} & \left[ \frac{u_o^2}{L} \sum_{i=1}^{np} t_i b_i - \frac{1}{4} \frac{\pi^2 n^2}{L^2} u_o (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2) \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^3 \right. \\ & + \frac{9}{256} \frac{\pi^4 n^4}{L^3} (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2)^2 \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^5 + \frac{9}{256} \pi^4 L (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2)^2 \sum_{i=1}^{np} t_i b_i \\ & + 2 \nu \left( -\frac{\pi^2}{8} u_o (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2) \sum_{i=1}^{np} t_i b_i + \frac{1}{256} \frac{\pi^4 n^2}{L} (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2)^2 \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^3 \right) \\ & \left. + \frac{1}{128} (1-\nu) \frac{\pi^4 n^2}{L} (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2)^2 \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^3 \right] \end{aligned} \quad (51)$$

Pour un mode asymétrique, l'expression du champ de déplacement généralisé en flexion s'écrit :

$$w = b (w_{eq} - \bar{w}_{eq}) \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (52)$$

soit,

$$\tilde{w} = b \tilde{w}_{eq} \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (53)$$

La minimisation de  $\Pi$  par rapport à  $u_o$  (48) fournit l'accélération axiale :

$$\ddot{u}_o = \frac{-E}{M(1-\nu^2)} \left[ \frac{u_o}{L} \sum_{i=1}^{np} t_i b_i - \frac{\pi^2}{8} (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2) \left( \frac{n^2}{L^2} \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^3 + \nu \sum_{i=1}^{np} t_i b_i \right) \right] \quad (54)$$

et la minimisation de  $\Pi$  par rapport à  $w_{eq}$  fournit l'accélération transversale :

$$\ddot{w}_{eq} = \frac{-2E}{(1-\nu^2)} \frac{A}{\sum_{i=1}^{np} m p_i L b_i^3} \quad (55)$$

avec,

$$A = \left[ \frac{\pi^4 L}{24} (w_{eq} - \bar{w}_{eq}) \sum_{i=1}^{np} t_i^3 b_i \left[ \frac{1+n^2 b_i}{b_i + \frac{n^2 L^2}{2}} \right]^2 - \frac{1}{2} \frac{\pi^2 n^2}{L^2} u_o w_{eq} \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^3 \right. \\ \left. + \frac{9}{64} \frac{\pi^4 n^4}{L^3} w_{eq} (w_{eq} - \bar{w}_{eq})^2 \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^5 + \frac{9}{64} \pi^4 L w_{eq} (w_{eq} - \bar{w}_{eq})^2 \sum_{i=1}^{np} t_i b_i \right. \\ \left. - \frac{\pi^2}{2} \nu u_o w_{eq} \sum_{i=1}^{np} t_i b_i + \frac{1}{32} \frac{\pi^4 n^2}{L} w_{eq} (w_{eq} - \bar{w}_{eq})^2 \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^3 \right]$$

et  $m p_i$  correspondant à la masse par unité de surface de la  $i$ ème plaque de l'assemblage.

### Comportement plastique

Dans ce cas, nous faisons l'hypothèse que le matériau est incompressible ( $\nu=1/2$ ). La matrice constitutive du matériau s'exprime dans ce cas :

$$\mathbf{C} = \frac{4}{3} E_s \begin{bmatrix} C_I \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \text{ où } C_I = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{E_t}{E_s} \quad (56)$$

Les énergies de flexion et de membrane prennent donc la forme suivante :

$$U_f = \frac{1}{72} E_s \pi^4 L (w_{eq} - \bar{w}_{eq})^2 \sum_{i=1}^{np} t_i^3 b_i \left[ \frac{C_I n^4 b_i^2}{L^4} + \frac{1}{b_i^2} + \frac{2n^2}{L^2} \right] \quad (57)$$

$$U_m = \frac{2}{3} E_s \left[ \frac{C_I u_o^2}{L} \sum_{i=1}^{np} t_i b_i - \frac{1}{4} \frac{C_I \pi^2 n^2}{L^2} u_o (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2) \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^3 \right. \\ \left. + \frac{9}{256} \frac{C_I \pi^4 n^4}{L^3} (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2)^2 \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^5 + \frac{9}{256} \pi^4 L (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2)^2 \sum_{i=1}^{np} t_i b_i \right. \\ \left. - \frac{1}{8} \pi^2 u_o (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2) \sum_{i=1}^{np} t_i b_i + \frac{1}{128} \frac{\pi^4 n^2}{L} (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2)^2 \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^3 \right] \quad (58)$$

La minimisation de  $\Pi$  par rapport à  $u_o$  fournit l'accélération axiale :

$$\ddot{u}_o = -\frac{2}{3} \frac{E_s}{M} \left[ \frac{2 C_I u_o}{L} \sum_{i=1}^{np} t_i b_i - \frac{1}{4} \frac{C_I n^2 \pi^2}{L^2} (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2) \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^3 - \frac{1}{8} \pi^2 (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2) \sum_{i=1}^{np} t_i b_i \right] \quad (59)$$

Par rapport à  $w_{eq}$ , elle fournit l'accélération transversale :



$$\ddot{w}_{eq} = -\frac{8}{3} E_s \frac{A}{\sum_{i=1}^{np} m p_i L b_i^3} \quad (60)$$

avec,

$$A = \left[ \frac{\pi_4 L}{24} (w_{eq} - \bar{w}_{eq}) \sum_{i=1}^{np} t_i^3 b_i \left[ \frac{C n_4 b_i^2 + 1 + 2 n_2}{L_4} \frac{1}{n p b_i^2} + \frac{2 n_2}{L_2} \right] - \frac{1}{2} \frac{C \pi_2 n_2}{L} u_o w_{eq} \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^3 \right. \\ \left. + \frac{9}{64} \frac{C \pi_4 n_4}{L_3} w_{eq} (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2) \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^5 + \frac{9}{64} \pi_4 L w_{eq} (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2) \sum_{i=1}^{np} t_i b_i \right. \\ \left. - \frac{\pi_2}{4} u_o w_{eq} \sum_{i=1}^{np} t_i b_i + \frac{1}{32} \frac{\pi_4 n_2}{L} w_{eq} (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2) \sum_{i=1}^{np} t_i b_i^3 \right]$$

Les équations (59) et (60) sont fonction du module sécant  $E_s$ , dont nous ne connaissons pas l'évolution. Pour le déterminer, en suivant la même démarche qu'au paragraphe « 1.1.1. *Chargement quasi-statique* », la courbe de contrainte-déformation est idéalisée par le modèle élasto-plastique suivant :

$$\sigma = \sigma_o \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} \right)^m \quad (61)$$

où,  $\sigma_o$  est la limite élastique,  $\varepsilon_o$  la déformation correspondante, et  $m$  le coefficient d'écroutissage du matériau.

Nous en déduisons :

$$E_s = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma_o}{\varepsilon_o} \varepsilon^{m-1} \quad (62)$$

#### Calcul de la charge ultime dynamique

La démarche que nous utilisons consiste, dans un premier temps, à calculer la charge ultime dynamique pour un flambement élastique. Pour cela, nous utilisons le critère de von Mises en contraintes planes que nous corrigeons dynamiquement avec la loi de Cowper-Symonds afin de tenir compte de l'influence de la vitesse de déformation :

$$\sigma_{xx} - \sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + 3 \sigma_{xy}^2 = \sigma_{oD}^2 \quad (63)$$

avec,

$$\sigma_{oD} = \sigma_o \left[ 1 + \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{D} \right)^p \right] \quad (64)$$

Comme précédemment, le premier point de plastification peut se localiser sur une ligne de coin ou au centre de la plaque.

Dans le premier cas ( $y=0$ ), le critère de von Mises corrigé dynamiquement s'écrit :

$$(1 - \nu + \nu_2) \frac{u_o^2}{L^2} + \frac{\pi_4}{4} (1 - \nu + \nu_2)^2 (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2)^2 + \frac{\pi_2}{2L} (1 - 4\nu + \nu_2) u_o (w_{eq}^2 - \bar{w}_{eq}^2) = \left( \frac{\sigma_{oD} (1 - \nu_2)}{E} \right)^2 \quad (65)$$

Pour le calcul de  $\sigma_{oD}$ , la vitesse de déformation moyenne s'exprime :

$$\dot{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\epsilon}\| \quad (66)$$

avec,

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\dot{u}_o}{L}, \quad \dot{\epsilon}_{yy} = \frac{1}{2} \dot{w}_{eq} \pi^2 \quad \text{et} \quad \dot{\epsilon}_{xy} = 0$$

Dans le second cas ( $y=b/2$ ), le critère de plastification s'exprime :

$$(1-\nu+\nu_2) \frac{u_o^2}{L^2} = \left( \frac{\sigma_{ob}(1-\nu_2)}{E} \right)^2 \quad (67)$$

avec,

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\dot{u}_o}{L} \quad \text{et} \quad \dot{\epsilon}_{yy} = \dot{\epsilon}_{xy} = 0$$

De là, à partir des équations (59) et (60), nous pouvons résoudre numériquement le système à l'aide d'un algorithme à schéma explicite classique (Runge-Kutta) en vue d'obtenir,  $\dot{u}_o$ ,  $u_o$ ,  $\dot{w}_{eq}$  et  $w_{eq}$ .

A chaque itération du calcul, nous comparons la contrainte axiale courante  $\frac{M\dot{u}_o}{S}$  à la contrainte de von Mises corrigée, où  $S$  est la section totale du profilé.

Dès que l'une des relations (65) ou (67) est satisfaite, nous en déduisons l'effort ultime dynamique en flambement élastique :

$$R_{uDel} = M\dot{u}_o \quad (68)$$

Dans un second temps, pour vérifier si le comportement en flambement peut être plastique, nous utilisons le résultat de l'effort ultime de flambement plastique quasi-statique, que nous corrigeons dynamiquement :

$$R_{uDpl} = R_{uPl} \left[ 1 + \left( \frac{\dot{\epsilon}}{D} \right)^{\frac{1}{p}} \right] \quad (69)$$

avec,

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\dot{u}_u}{L} \quad \text{et} \quad \dot{\epsilon}_{yy} = \dot{\epsilon}_{xy} = 0$$

Pour obtenir l'évolution de la charge jusqu'à l'instabilité, nous utilisons les relations (59) et (60) en suivant la même démarche que précédemment. Mais cette fois-ci, comme critère d'arrêt, nous utilisons l'effort ultime de flambement plastique corrigé dynamiquement  $P_{uDpl}$  (69), que nous considérons comme point d'instabilité. Cette hypothèse est vérifiée dans la mesure où les inerties deviennent négligeables en cas d'écoulement plastique par rapport aux effets de la vitesse de déformation. Pour la correction dynamique,  $\dot{u}_u$  est une valeur particulière de  $\dot{u}_o$ , dont le déplacement correspondant,  $u_o$ , n'est autre que le déplacement ultime de flambement plastique antisymétrique,  $u_u$ .

Ainsi, en comparant les relations (68) et (69) et en postulant le principe du travail minimum, si  $P_{u_{Dpl}} < P_{u_{Del}}$  nous sommes donc en présence d'un flambement plastique dynamique.

## 2.2. Phase de post-effondrement

Lors du processus d'écrasement axial d'une structure métallique à parois minces, l'énergie est dissipée plastiquement par la formation de plis ou lobes dans lesquels le métal subit une grande déformation irréversible. Le passage des petites aux grandes déformations est marqué par l'état critique de flambage où les lois de comportement habituelles deviennent compliquées et inextricables. Au-delà du seuil critique, la résistance de la structure diminue, et ce, jusqu'à son état limite final ; cette approche est connue sous le nom de "post-effondrement".

L'étude des mécanismes de post-effondrement est un aspect important dans la prédiction de la résistance à l'écrasement ou de la destruction complète d'une structure. Elle intervient surtout dans l'analyse théorique et expérimentale de tubes à parois minces ayant une section de forme géométrique relativement simple (prismatique ou circulaire). Ces tubes minces constituent des pièces essentielles de châssis de véhicules automobiles ou ferroviaires qui ont pour rôle d'absorber les chocs tout en se déformant d'une façon appréciable, garantissant ainsi la sécurité des passagers.

Absorber l'énergie cinétique tout en maintenant des niveaux d'accélération et de décélération supportables, telle est la clef du problème de la sécurité passive que nous avons évoqué en introduction. L'accroissement des performances des longerons et autres dispositifs absorbeurs passe nécessairement par l'amélioration du design des sections et par un choix judicieux des matériaux constitutifs. Pour trouver le meilleur compromis, il est indispensable d'itérer le processus en faisant varier les paramètres section et matériau. L'intérêt des modèles analytiques réside dans une mise en données très rapide et un résultat quasi-instantané, ce qui autorise un processus de design itératif.

Deux types d'approches se dégagent dans la littérature scientifique :

- l'approche analytique basée sur des relations semi-empiriques tirées de multiples essais expérimentaux,
- l'approche analytique par modèles cinématiques, basée sur l'étude du faciès de déformation quasi-statique.

La première approche, de type semi-empirique, a été utilisée entre autres, par Aya [AYA 74], Magee [MAG 78] et la Ford Motor Company [MAH 81], [MAH 82], [MAH 84], [MAH 85], [HIK 86], [MAH 86], [MAH 88] pour améliorer le design collision des longerons automobiles. Dans le cas de Ford, ce programme de recherche a abouti au développement des programmes VCRUSH et SECOLLAPSE. Ces programmes permettent l'analyse 3D des structures à composants minces soumises au choc en utilisant des formulations incrémentales de type éléments finis. Cependant, cette approche a l'inconvénient de ne pas être facilement généralisable aux différents types de sections que nous pouvons rencontrer dans le domaine des transports et la formulation incrémentale qu'elle utilise ne la rend pas très performante pour un processus de design. Les coefficients utilisés dans les relations semi-empiriques sont obtenus par de multiples essais expérimentaux sur une gamme de sections données en faisant varier les dimensions et le matériau. Cette approche nécessite donc un modèle par gamme de sections.

La seconde approche est basée sur l'observation de la cinématique de déformation. Lors

du processus d'écrasement d'un profilé à parois minces, l'énergie est dissipée par la formation de lobes plastiques. Le but de cette approche consiste à analyser le faciès d'effondrement quasi-statique et à l'idéaliser en recensant les différentes zones de dissipation énergétique. Nous obtenons un modèle composé d'éléments géométriques rigides de forme simple dont les liaisons dissipent l'énergie par extensions ou par charnières plastiques. La formulation théorique des modèles cinématiques, fondée à partir du théorème de l'analyse limite, est basée sur un ensemble de déplacements cinématiquement admissibles et fournit une solution de type borne supérieure. L'avantage des modèles cinématiques réside dans la possibilité de les généraliser à une très grande gamme de sections par paramétrage de la géométrie.

L'objectif étant de pouvoir caractériser l'effondrement de la majorité des profilés rencontrés dans la construction des véhicules de transports, la suite de ce cours est consacrée à l'utilisation et au développement de modèles cinématiques en compression.

En matière de modèles cinématiques en compression, de nombreux travaux ont été menés depuis le milieu des années 70. Ici, nous ne nous intéressons qu'aux sections prismatiques. Les sections circulaires ont fait l'objet de nombreuses études et développements, [ALE 60], [PUG 79], [ABR 84a], [WIE 92], [REI 93], mais sont encore assez peu utilisées dans le domaine des transports. Sur la base des modèles développés pour les sections prismatiques, de nombreuses applications parallèles ont été effectuées. Nous pouvons citer, entre autres, les travaux de Reid [REI 86] et Abramowicz-Wierzbicki [ABR 88] sur l'utilisation combinée de mousses polyuréthanes injectées dans les profilés à parois minces. De même, nous pouvons faire référence aux travaux de Wang [WAN 91] sur l'emploi de tubes filés avec des fibres composites et de Reddy [RED 93] sur l'adjonction de fibres de bois à l'intérieur des profilés. L'intérêt commun de tous ces procédés est, d'accroître la consommation énergétique et d'améliorer la stabilité de l'absorbeur en pilotant le mode de déformation et ainsi, d'éviter les risques de flambements globaux de type Eulérien.

Pour tous les modèles existants, le concept de modélisation d'une structure à parois minces, proposé par Wierzbicki [WIE 77] et Abramowicz [ABR 79], est identique. Comme illustré par la Fig. 5, le profilé, que nous avons choisi à angles droits pour des raisons de simplicité, est découpé de façon imaginaire selon les éléments coins qui le composent. Chaque élément coin, qui préfigure un lobe plastique, est isolé du reste de la colonne au moyen de deux plans horizontaux  $H_1$  et  $H_2$  au travers desquels le déplacement transversal au niveau des frontières horizontales disparaît. Le déplacement interne relatif est donc égal à la distance d'écrasement courante  $\delta$  et la hauteur initiale de la tranche résultante est  $2H$ . Deux coupures additionnelles sont pratiquées par symétrie plane sur la section et sont repérées par  $V_1$  et  $V_2$ . Du fait des conditions de symétrie les déformations internes à ces deux plans sont nulles. Pour ce qui est des déplacements externes, ils sont arbitraires et fonctions du cas traité. Ainsi, ces quatre plans définissent les frontières de l'élément coin caractérisé par sa longueur d'onde  $2H$  de flambement plastique, sa largeur  $C$ , son épaisseur  $t$  et l'angle  $2\Psi_0$  entre ses deux faces adjacentes.

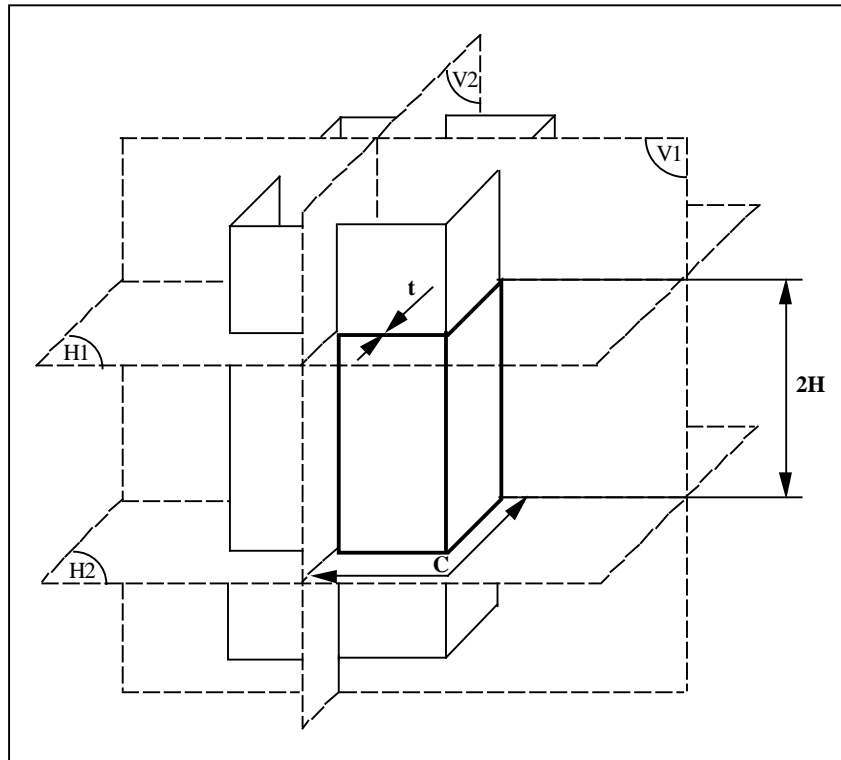


Figure 5. Concept de modélisation d'une structure à parois minces.

Grâce aux conditions de symétrie il est possible de calculer la dissipation énergétique pour chaque élément coin, puis de sommer les contributions élémentaires pour obtenir la dissipation de la section entière.

Pour ce qui est de l'analyse théorique, elle est basée d'une part sur l'observation du faciès d'effondrement résultant d'essais expérimentaux quasi-statiques et d'autre part sur certains principes mécaniques que sont les grandes déformations plastiques des coques [WIE 88].

Des essais quasi-statiques sur échantillons rectangulaires suffisamment courts font apparaître le mode d'effondrement représenté Fig. 6.a, idéalisé à la Fig. 6.b

Il s'avère que ce mode de pliage asymétrique est déclenché par celui du flambage de plaques sur appuis simples. C'est pour cette raison que l'échantillon ne doit pas être trop élancé, sinon il y a instabilité globale et c'est le mode de flambement Eulérien qui amorce l'écrasement, suivi d'un effondrement en flexion.

Le concept de modélisation consiste à trouver un mécanisme simplifié se rapprochant le plus du mode idéalisé tout en étant cinématiquement admissible. De nombreux modes de pliage peuvent conduire à cette forme, mais avec des degrés de simplicité très variables et un respect plus ou moins grand de la condition de continuité cinématique. Wierzbicki [WIE 82] a montré qu'ils se départagent en deux grandes classes, les mécanismes de pliage inextensibles et extensibles représentés à la Fig. 7.

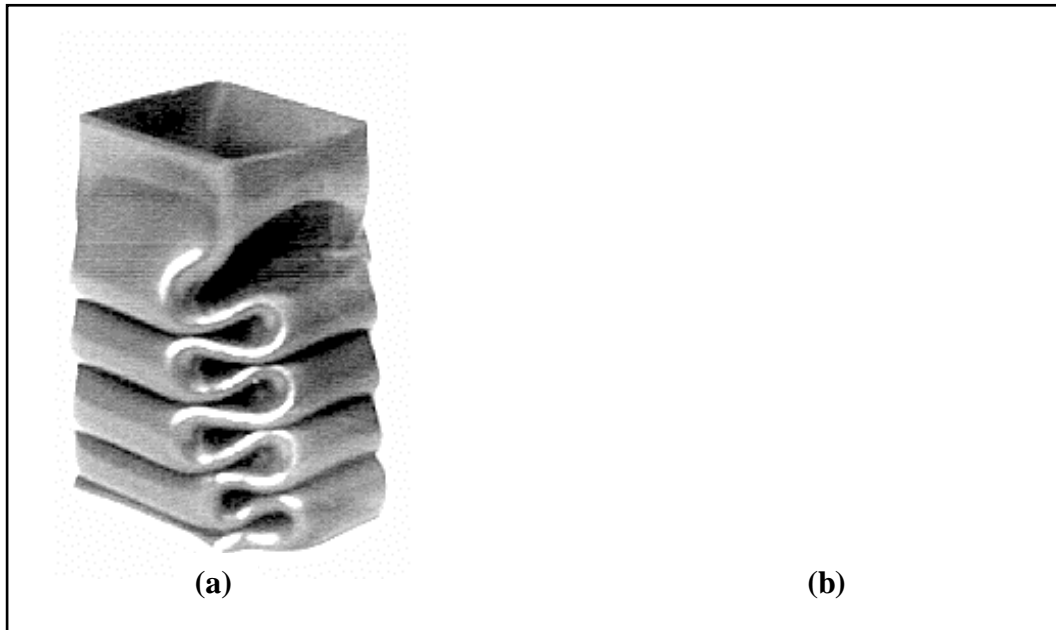


Figure 6. Faciès d'effondrement en compression axiale: a- expérimental , b- idéalisé.

Les modes A , utilisés entre autres par Pugsley [PUG 79] et Johnson [JOH 77], et B sont purement inextensibles. Ils décrivent certes la géométrie du processus d'écrasement mais conduisent à des discontinuités dans les pentes et sont donc cinématiquement inadmissibles. Le mode C, utilisé par Ohkubo [OHK 74] et Wierzbicki [WIE 77], est également inextensible mais respecte, en partie, la condition de continuité cinématique par des lignes de pliages inclinées mobiles. Or, la mobilité de ces lignes de pliage conduit à une discontinuité dans le champ de déplacement qui se traduit par l'ouverture représentée Fig. 7.c. Ce gap indique qu'une zone d'extension est nécessaire pour assurer la continuité.

De tous ces modes, seuls les modes D et E (antisymétrique de D) satisfont les conditions de frontières et de continuité cinématique. Cependant, le développement de tels modes nécessitent de formuler une énergie de dissipation continue en flexion avec inversion de courbure pour reproduire le mode idéalisé. Cela conduit à une formulation analytique du problème beaucoup trop complexe.

Sur la base de ces premières constatations Wierzbicki et Abramowicz [WIE 83a] ont proposé un nouveau mécanisme, reprenant les avantages du mode D, mais de formulation beaucoup plus simple. Ce modèle est une superposition des modes A et C avec un champ de déplacement additionnel décrit par deux rayons de raccordement, l'un pour les lignes de pliage horizontales et l'autre pour les lignes de pliage inclinées mobiles. Pour assurer la continuité cinématique l'intersection des lignes horizontales et inclinées fait intervenir une zone de surface toroïdale où sont confinées les extensions. Ce mécanisme, représenté Fig. 8, n'est donc, ni purement inextensible, ni purement extensible. Les auteurs l'ont appelé mécanisme quasi-inextensible et il se caractérise par trois zones de dissipation énergétique : deux lignes de pliage horizontales ABC, deux lignes de pliages inclinées mobiles UBL et une surface toroïdale d'extension B.

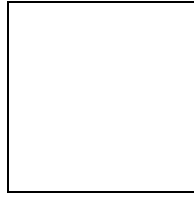


Figure 7. Mécanismes de pliage inextensibles et extensibles.

Ce mode quasi-inextensible est le plus fréquemment observé des modes d'effondrement antisymétriques et respecte l'idéalisation de la Fig. 6.a.

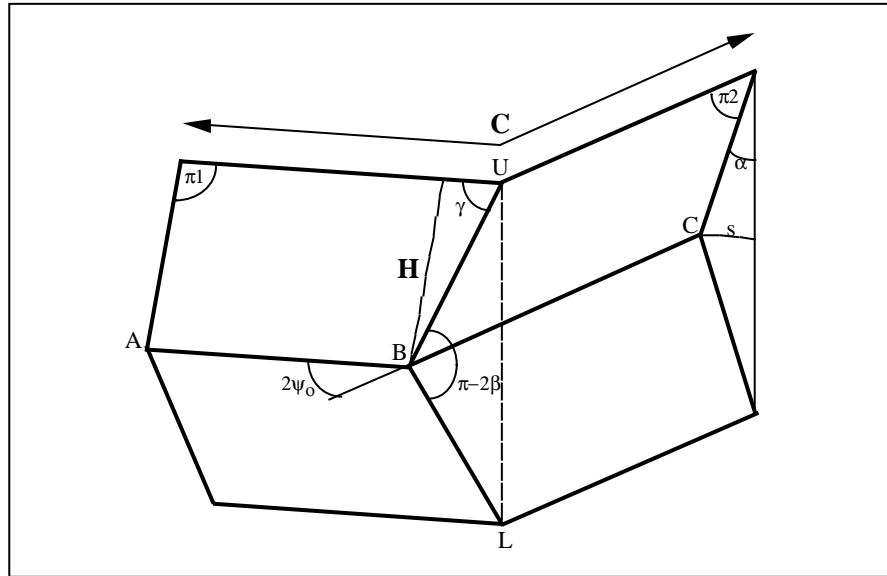


Figure 8. Mécanisme de pliage quasi-inextensible.

Cependant, en multipliant les essais expérimentaux sur diverses sections et en faisant varier le ratio largeur  $C$  sur épaisseur  $t$ , Abramowicz et Jones [ABR 84b], [ABR 84c] se sont trouvés en présence de modes très complexes comme ceux de la Fig. 9. L'apparition de ces différents mécanismes est fonction de la mobilité ou de la stationnarité des lignes de pliages inclinées. Le comportement de ces dernières dépend, des conditions de symétrie du chargement, de la géométrie de la section et des contraintes géométriques additionnelles dues entre autres aux imperfections. Ainsi, selon la mobilité ou la stationnarité de l'une ou des deux lignes de pliage inclinées, nous pouvons nous trouver en présence de modes très complexes combinant des comportements symétriques, antisymétriques et mixtes.

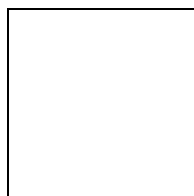


Figure 9. Idéalisation des différents mécanismes de pliage observables.

Seuls les modes **a** et **b** de la Fig. 9 ont été retenus en raison de leur grande répétitivité observée au cours de multiples essais expérimentaux. Ils ont été répertoriés respectivement mode I et mode II.

Le mode I, que nous reconnaissons comme étant le mécanisme quasi-inextensible [WIE

83a], traduit le comportement totalement mobile des lignes de pliage inclinées.

Le mode II, proposé par Hayduk et Wierzbicki [HAY 84], traduit quant à lui le comportement totalement stationnaire de ces mêmes lignes de pliage et caractérise un mécanisme purement extensible. C'est pourquoi les faces initialement rectangulaires se transforment en éléments trapézoïdaux en faisant apparaître deux cônes d'extension. La Fig. 10 illustre ce second mode d'effondrement qui se caractérise également par trois zones de dissipation énergétique : deux lignes de pliage horizontales ABD, deux lignes de pliages inclinées stationnaires UBL et deux surfaces coniques d'extension UB et BL. En combinant ces deux modes sur les  $n$  éléments coins qui composent une section arbitraire Abramowicz et Jones [ABR 84b], [JON 85], [ABR 86] ont réussi à reproduire les différents modes d'effondrement rencontrés au cours de leurs essais et ont obtenu des résultats très satisfaisants. Cependant, rien ne permet de prédire quel mode ou quelle combinaison de modes domine le processus d'écrasement. Au niveau industriel cette démarche est donc inapplicable.

La recherche de la prédiction de l'effort d'écrasement des structures à parois minces de sections arbitraires a conduit Wierzbicki et Abramowicz [WIE 89a] à développer un nouveau mécanisme de pliage en combinant les modes I et II, mais cette fois-ci, au niveau même du comportement de chaque élément coin. En effet, des observations plus précises de la cinématique de déformation ont montré qu'en fait il y avait coexistence entre les modes quasi-inextensibles et extensibles durant le processus complet de formation d'un lobe plastique. Cette coexistence aurait suggéré le développement d'un modèle parallèle où les deux modes contribueraient simultanément à la résistance à l'écrasement de l'élément coin. Un tel modèle est très intéressant du point de vue théorique mais aurait conduit à une formulation trop complexe nécessitant le recours à une puissance informatique contradictoire avec les objectifs.

Les observations indiquant une certaine prédominance du mode quasi-inextensible en début d'effondrement et une certaine prédominance du mode extensible vers la fin, les auteurs ont opté pour le développement d'un modèle dans lequel ces deux modes s'activent en série. Ce modèle série, représenté Fig. 11, a été appelé mode mixte généralisé. Il se caractérise par une première phase d'écrasement pilotée par le mode quasi-inextensible. Arrivé à une configuration intermédiaire, le mode extensible prend le relais et contrôle la seconde phase de l'écrasement jusqu'à la configuration finale.

Du fait de la combinaison des modes I et II, ce modèle est le plus abouti et permet de caractériser, de façon quasi-universelle, le post-effondrement des profilés à parois minces de sections fermées arbitraires. La formulation de ce modèle est détaillée à la suite.



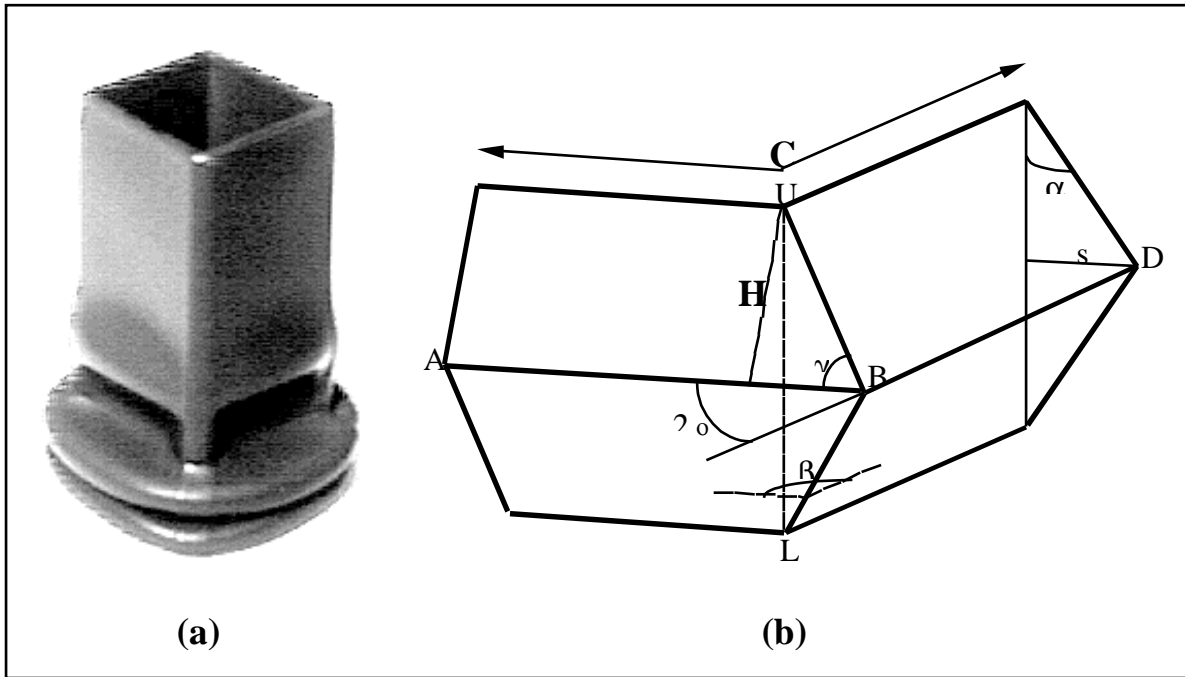


Figure 10. Mécanisme de pliage extensible: a- expérimental , b- idéalisé.

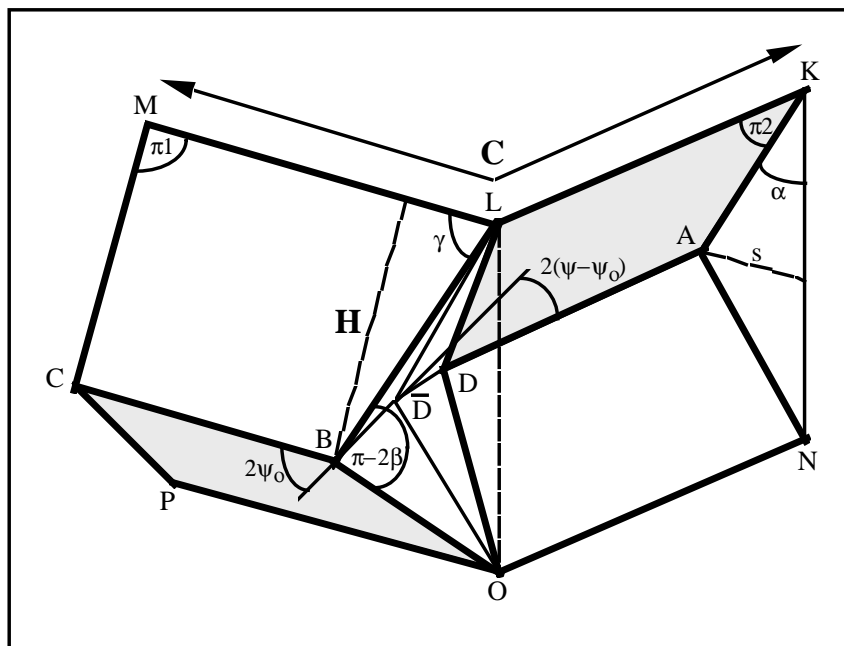


Figure 11. Modèle cinématique mixte généralisé [ABR 89].

Comme représenté sur la Fig. 11, la caractéristique de compression axiale est obtenue par le modèle cinématique mixte généralisé [ABR 89]. La théorie est basée sur l'observation qu'un élément coin d'un profilé prismatique ne peut se déformer qu'en un nombre limité de modes d'effondrement plastique, principalement les modes asymétrique et symétrique. Le modèle cinématique décompose le processus de pliage en deux phases. La première est contrôlée par le mode quasi-inextensible ou asymétrique (Fig. 12a). L'angle de rotation  $\alpha$  de la plaque est choisi de façon à représenter une variable indépendante du processus (paramètre temporel). Ce mode d'effondrement persiste jusqu'à une configuration intermédiaire  $\bar{\alpha}$  et engendre trois zones de

déformation plastique :

- une surface toroïdale B de rayons  $r$  et  $R$  où sont confinées les déformations en extension selon la direction circonférentielle,
- deux lignes de pliage horizontales stationnaires ABC,
- deux lignes de pliage inclinées mobiles LBO.

En ce point, le mode extensible prend le contrôle du processus d'écrasement, persiste jusqu'à la configuration finale  $\alpha_f$  et engendre également trois zones de déformation plastique :

- deux surfaces coniques de déformation en extension  $L\bar{D}\bar{D}$  et  $O\bar{D}\bar{D}$ ,
- deux lignes de pliage horizontales stationnaires ADBC,
- deux lignes de pliage inclinées stationnaires LBO.

Pour  $\bar{\alpha} = 0$ , le modèle est représentatif du mode d'écrasement symétrique (Fig. 12b) et seules les trois dernières zones de déformation plastique sont actives.

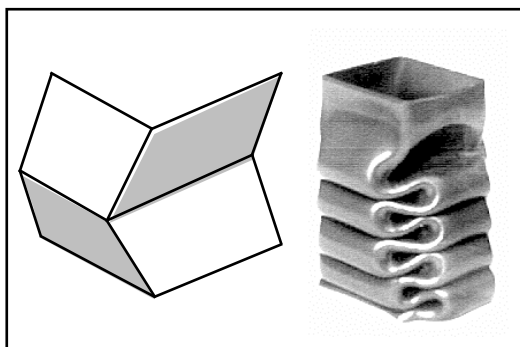


Figure 12a. Mode naturel de pliage asymétrique.

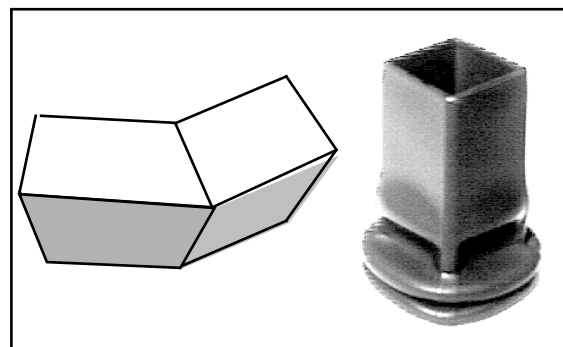


Figure 12b. Mode naturel de pliage symétrique.

Deux vecteurs de paramètres sont à considérer :

- le vecteur entrée des paramètres connus :

$$\xi = (C, t, 2\psi_0) \quad (70)$$

où,  $C$  est la largeur de l'élément coin,  $t$  est l'épaisseur de la paroi et  $2\psi_0$  est l'angle entre les deux faces adjacentes de l'élément coin.

- le vecteur sortie des paramètres inconnus :

$$\chi = (r, H, \bar{\alpha}) \quad (71)$$

où,  $r$  est le petit rayon de la surface toroïdale,  $H$  est la demi longueur d'onde de pliage et  $\bar{\alpha}$  est l'angle de basculement entre les phases quasi-inextensible et extensible.

Idéalisant le comportement du matériau comme étant rigide-plastique avec écrouissage linéaire, caractérisé par une contrainte d'écoulement équivalente  $\sigma_0$ , le théorème des puissances virtuelles est utilisé pour résoudre le problème. La méthode consiste à calculer la force d'écrasement instantanée pour chaque élément coin composant la section et à additionner ces forces élémentaires.

- (i) A l'équilibre, les puissances interne et externe doivent être égales:

$$\dot{W}_{int} = \dot{W}_{ext} = P(\alpha) \quad (72)$$

avec,

$$\dot{W}_{int} = \int_S (M_{\alpha\beta} \dot{\kappa}_{\alpha\beta} + N_{\alpha\beta} \dot{\epsilon}_{\alpha\beta}) dS + \sum_{i=1}^{nhl} \int_{L^{(i)}} M_o^{(i)} [\dot{\Theta}^{(i)}] dt^{(i)} \quad (73)$$

où,

$L^{(i)}$  est la longueur de la  $i$ ème rotule plastique,

$nhl$  est le nombre de lignes de pliage stationnaires ou mobiles,

$M_o^{(i)} = \frac{\sigma_o t^2}{4}$  est le moment de flexion parfaitement plastique (par unité de longueur),

$M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{\alpha\beta} z dz$  est le moment de flexion dans les zones continûment déformées,

$N_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{\alpha\beta} dz$  est l'effort de membrane dans les zones continûment déformées,

$\dot{\kappa}_{\alpha\beta}$  est le tenseur des vitesses de courbure,

$\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}$  est le tenseur des vitesses de déformation.

Dans la relation (73), le premier terme de droite correspond aux puissances dissipées dans les zones continûment déformées de l'élément coin et le second terme correspond aux puissances dissipées dans les lignes de pliage.

$\dot{W}_{int}$  est une fonction des inconnues  $(r, H, \bar{\alpha})$ . Pour les déterminer, nous appliquons le principe du travail minimum en accord avec le théorème de plasticité de Markov-Hill. Les paramètres qui minimisent le travail des déformations plastiques, proportionnel à  $P_m$  l'effort moyen d'écrasement, sont définis par :

$$\frac{\partial}{\partial (r, H, \bar{\alpha})} P_m(r, H, \bar{\alpha}, \alpha_f) = 0 \quad (74)$$

L'effort moyen d'écrasement  $P_m$  s'exprime par :

$$P_m \delta_{eff} = \int_0^{\alpha_f} d\alpha \int_v \sigma \dot{\epsilon} dv = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^6 N_j W_{ij} \quad (75)$$

où,  $\delta_{eff}$  est la distance effective d'écrasement,  $W_{ij}$  correspond aux énergies dissipées dans les six zones,  $M$  est le nombre d'éléments coins et  $N_j$  est le nombre de contributions de chaque zone de dissipation énergétique.

En remplaçant les  $W_{ij}$  par leurs équations résultantes, l'effort moyen d'écrasement s'écrit :

$$\frac{P_m}{M_o} = \left\{ A_1 \frac{r}{t} + (A_2 + A_5) \frac{C}{H} + A_3 \frac{H}{r} + A_4 \frac{H}{t} + A_6 \right\} \delta_{eff} \quad (76)$$

avec,

$$\begin{aligned} A_1 &= 8I_1(\Psi_o, \bar{\alpha}) \\ A_2 + A_5 &= 2\alpha_f \\ A_3 &= 2I_3(\Psi_o, \bar{\alpha}) \\ A_4 &= 4I_4(\Psi_o, \bar{\alpha}) \\ A_6 &= I_6(\Psi_o, \bar{\alpha}) \end{aligned}$$

où,  $I_1$ ,  $I_3$ ,  $I_4$  et  $I_6$  correspondent aux intégrales intervenant dans le calcul des énergies dissipées.

Sous cette forme, nous pouvons minimiser numériquement l'effort moyen  $P_m$  en utilisant l'algorithme de Hill [HIL 86].

(ii) Ayant déterminé les inconnues  $(r, H, \bar{\alpha})$ , pour chaque élément coin et pour chacune des six zones de dissipation énergétique, nous en déduisons l'effort instantané de post-effondrement total :

$$P(\alpha) \dot{\delta} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^6 N_j \dot{W}_{ij} \quad (77)$$

où,  $\dot{W}_{ij} = f(\chi)$  sont les puissances dissipées dans les différents mécanismes plastiques exprimées en fonction du vecteur des inconnues  $\chi(r, H, \bar{\alpha})$ .  $M$  est le nombre d'éléments coins constituant la section et  $N_j$  est le nombre de contributions pour chacune des six zones de déformation plastique représentatives d'un élément coin déformé.

L'effort moyen d'écrasement est obtenu par minimisation par rapport à  $\chi$  :

$$P_m \delta_{eff} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^6 N_j W_{ij} \quad (78)$$

où,  $\delta_{eff}$  est la distance d'écrasement effective.

Ce modèle, limité aux sections transversales mono-épaisseur, a été étendu au cas de structures plus complexes à sections transversales multi-épaisseurs [DRA 95].

La configuration initiale (Fig. 11), définie par la largeur  $C$  de l'élément coin, a été divisée en  $C_1$  et  $C_2$  pour l'épaisseur de chaque plaque  $t_1$  et  $t_2$ . L'angle adjacent entre les deux plaques est  $2\Psi_o$ . Les paramètres d'entrée du modèle sont alors :

$$\xi = (C_1, C_2, t_1, t_2, 2\Psi_o) \quad (79)$$

Pour le calcul de l'effort moyen d'écrasement de structures à  $np$  plaques à épaisseurs et angles arbitraires, lorsque le premier lobe plastique apparaît, les lignes de pliages inclinées et les zones d'extension sont supposées situées sur la plus mince des deux plaques ( $t_1$ ). Pour les lobes suivants, ces mécanismes de dissipation d'énergie alternent entre les deux épaisseurs des éléments coin ( $t_1$  et  $t_2$ ).

Basé sur cet assemblage, le calcul de l'énergie dissipée dans les différentes zones de déformation peut être formulé de nouveau.

En appliquant la procédure de minimisation par rapport à  $\chi$ , et après assemblage des efforts élémentaires de chaque élément coin, l'effort d'écrasement moyen du  $i$ ème lobe,  $P_{m_{il}}$ , est obtenu :

$$P_{m_{il}} \delta_{eff} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^6 N_j W_{ij} \quad (80)$$

Dans le cas de sections multi-épaisseurs, l'effort d'écrasement moyen  $P_{m_{il}}$  de deux lobes consécutifs est différent à cause de l'alternance des deux épaisseurs de chaque élément coin. L'objectif n'est pas d'obtenir le profil d'écrasement entier de la colonne mais simplement de décrire la réponse instantanée du premier lobe. Pour les  $N-1$  lobes suivants, pouvant apparaître sur une colonne de longueur  $L$  et qui peuvent être en nombre pair ou impair, nous utilisons l'effort global d'écrasement moyen,  $P_m$ , qui prend en compte les deux épaisseurs alternatives,  $t_1$  et  $t_2$  :

$$P_m = \frac{L}{N-1} \sum_{il=2}^N P_{m_{il}} \quad (81)$$

où, le nombre impair  $il$  correspond à une section mince  $t_1$  et le nombre pair  $il$  correspond à une section épaisse  $t_2$ .

Le modèle mixte généralisé demeure cependant restreint au domaine des profilés à sections transversales monotubulaires. Le recours croissant aux aluminiums dans la construction des véhicules de transport, lié au procédé de fabrication par extrusion, fait que nous voyons apparaître de plus en plus souvent des profilés à sections transversales multitubulaires. Ce même type de profilé, illustré par la Figure 13a, apparaît sur les structures assemblées par soudage continu, notamment dans le ferroviaire.

Suivant le même concept d'élément coin que celui proposé par Wierzbicki et Abramowicz (Fig. 14), un modèle cinématique généralisé dédié au cas de structures plus complexes à sections transversales multitubulaires et multi-épaisseurs a été développé [MAR 94a]. La notion d'élément coin est ici remplacée par celle d'élément coin à faces communes, dont l'assemblage permet de constituer une sous-section en "T", "X" ou "Y" qui compose ce type de profilé.

La Figure 13b illustre le modèle cinématique d'un élément coin à faces communes développé en configuration d'effondrement asymétrique.

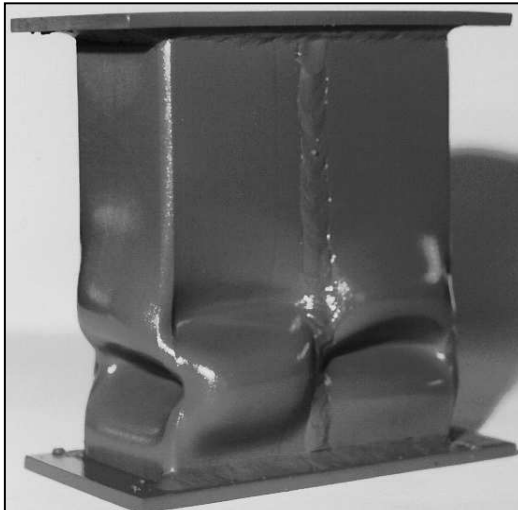


Figure 13a. Exemple de structure multitubulaire soudée en continu subissant un effondrement asymétrique.

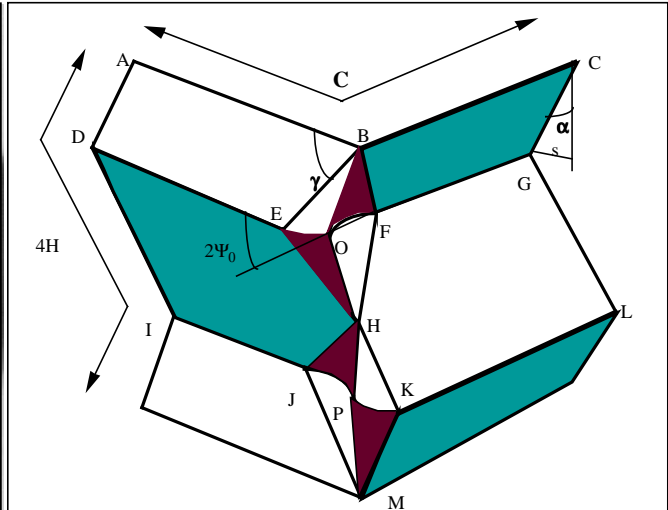


Figure 13b. Modèle cinématique d'élément coin à faces communes en mode d'effondrement asymétrique.

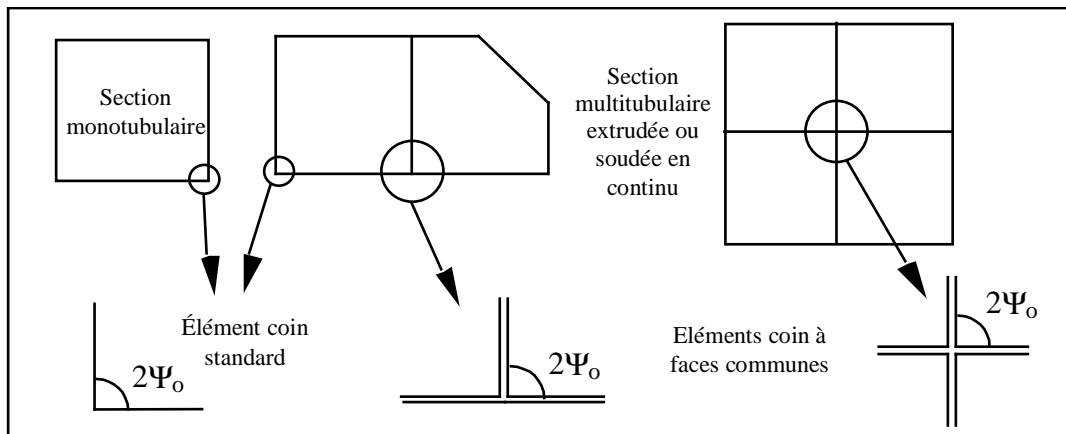


Figure 14. Décomposition d'une structure multitubulaire selon le concept d'éléments coin à faces communes.

### 3. Flexion Pure

Comme pour la compression axiale, la courbe de réponse typique d'une colonne prismatique sollicitée en flexion se décompose en 3 phases (Fig.15).

La phase de pré-effondrement correspond à des déformations élasto-plastiques. Dans le cas d'un flambement élastique, le point «A» caractérise le moment critique  $M_{cr}$  (Fig.15a). Une seconde phase de post-flambement apparaît lorsque chaque plaque est soumise à des déplacements transversaux. Au point d'effondrement (B-B'), le moment atteint un maximum (ou pic). Dans le cas de structures à section transversale épaisse, des déformations plastiques apparaissent avant l'instabilité du flambement. Le comportement élastique est dans ce cas suivi par une phase élasto-plastique jusqu'à apparition de l'instabilité plastique (Fig.15b). La phase de post-effondrement provoque alors une diminution du moment et de grandes déformations plastiques en flexion.

La démarche analytique qui suit, synthétisée sur la Fig. 16, traite séparément chaque étape du processus de déformation pour la détermination des caractéristiques en flexion de

profilés à parois minces de sections arbitraires [PAY 96], [DRA 99], [MAR 99].

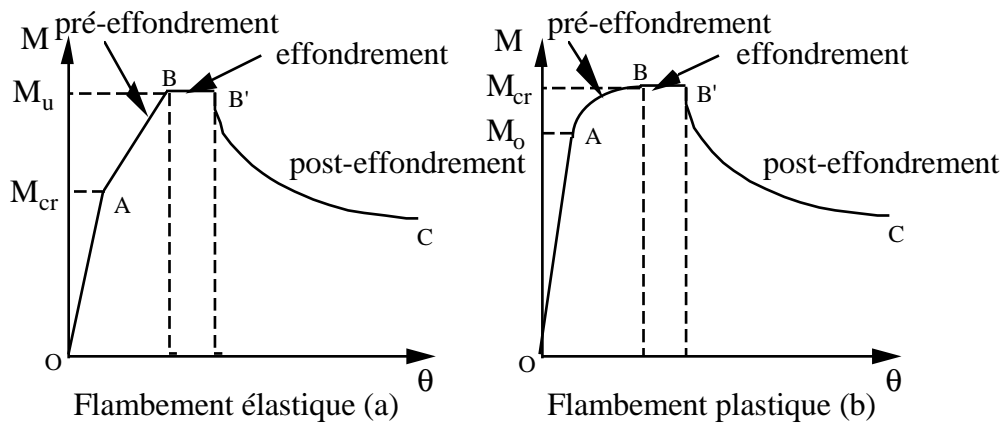


Figure 15. Courbes typiques de réponse du comportement en flexion : a- flambement élastique, b- flambement plastique.

### 3.1. Phases de pré-effondrement et d'effondrement

Nous étudions dans un premier temps le mode de flambement de la section. Comme montré par Dutheil [DUT 76], entre autres, la section peut être considérée comme un assemblage de plaques liées par des conditions aux limites (Fig. 17).

La nature et l'intensité du chargement subit par ces plaques est fonction de leur position par rapport à la fibre neutre :

- plaques uniformément comprimées,
- plaques uniformément tendues,
- plaques subissant un chargement de compression linéairement réparti,
- plaques subissant un chargement de tension linéairement réparti.

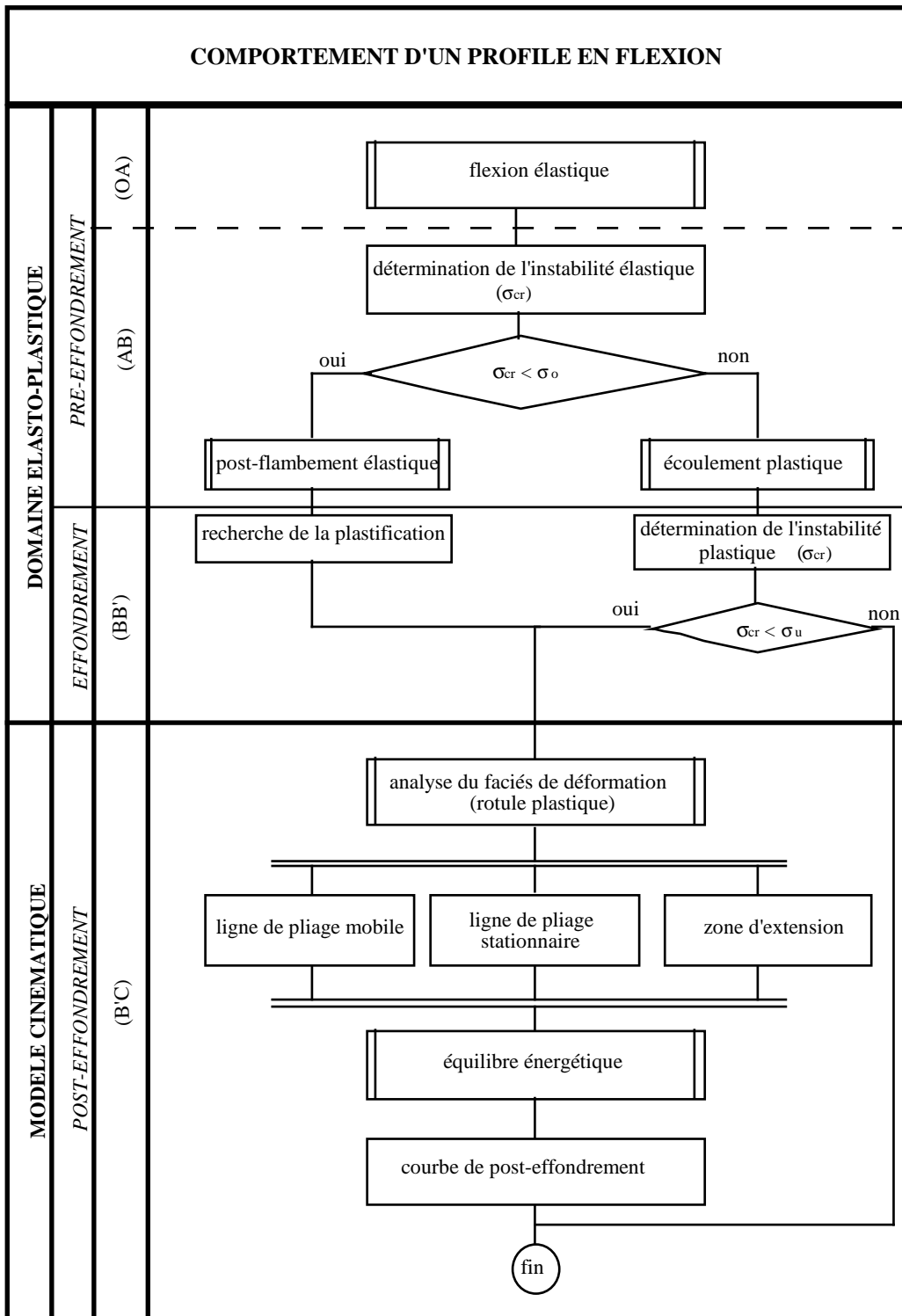


Figure 16. Caractérisation du comportement d'un profilé en flexion pure.



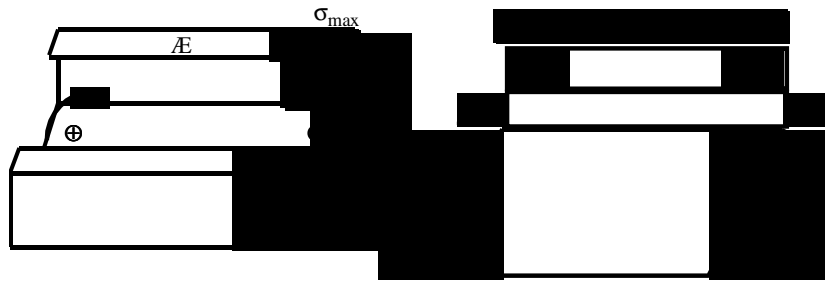


Figure 17. Décomposition d'un profilé en éléments plaques.

Dans un premier temps, nous étudions l'équilibre de chaque plaque indépendamment du reste de la structure (Fig. 18). Puis, nous déterminons le comportement global du profilé à partir de l'assemblage des différentes plaques.

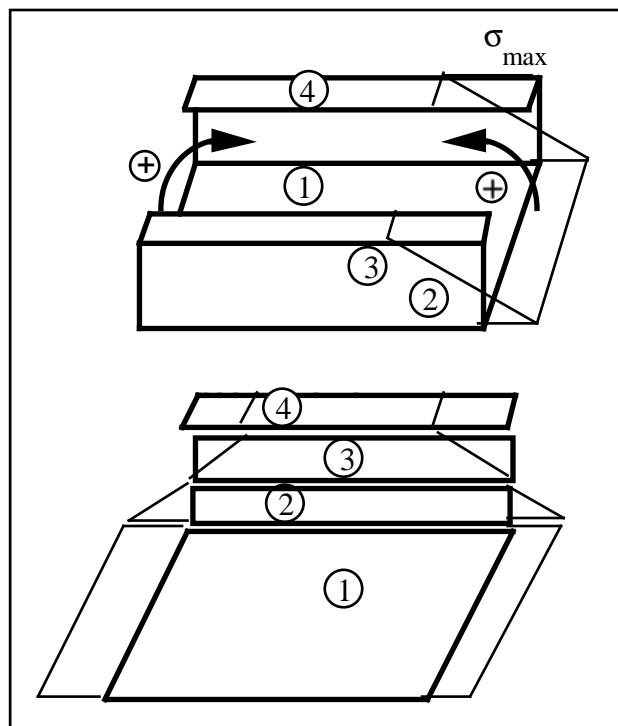


Figure 18. Décomposition du profilé.

L'équilibre de chaque plaque est étudié afin de déterminer le mode de flambement et la contrainte critique de flambement  $\sigma_{cr}$  (Fig. 19).

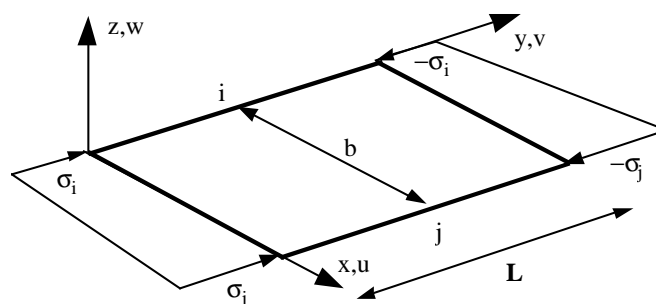


Figure 19. Champs de déplacement.

Mahendran [MAH 86] a défini un outil mathématique, utilisant les éléments finis et les séries de Fourier, pour déterminer le comportement d'une plaque soumise à des chargements

combinés de compression et de cisaillement. En suivant la même procédure, des modifications ont été faites de manière à satisfaire les conditions d'une plaque fléchie et assurer une répartition du moment constante le long de la longueur d'onde de flambement.

Les champs de déplacement suivants sont définis :

$$u = \sum_1^m \left[ \left( 1 - \frac{x}{b} \right) U_{im} + \frac{x}{b} U_{jm} \right] \sin(\beta_m y) \quad (82)$$

$$v = \frac{y}{L} \left[ \left( 1 - \frac{x}{b} \right) V_{im} + \frac{x}{b} V_{jm} \right] \quad (83)$$

$$w = \sum_1^m \left[ \left( 1 - \frac{3x^2}{b^2} + \frac{2x^3}{b^3} \right) W_{im} + \left( x - \frac{2x^2}{b} + \frac{x^3}{b^2} \right) \theta_{im} \right. \\ \left. + \left( \frac{3x^2}{b^2} - \frac{2x^3}{b^3} \right) W_{jm} + \left( \frac{x^3}{b^2} - \frac{x^2}{b} \right) \theta_{jm} \right] \sin(\beta_m y) \quad (84)$$

où,  $\beta_m = m \cdot \pi / L$  et  $m$  sont les termes de la série de Fourier ( $m=1,2,3,\dots$ ).

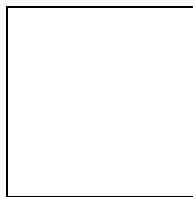
En fin de compression, la contrainte dans la plaque atteint une valeur critique pour laquelle des déplacements transversaux  $w$ , dus au voilement, apparaissent. Ces derniers provoquent une consommation énergétique de flexion supplémentaire. L'énergie potentielle totale s'écrit alors comme la somme des énergies de flexion, de membrane et du travail des efforts extérieur :

$$\Pi = U_f + U_m + U_{ext} \quad (85)$$

soit,

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^b \int_0^t z^2 \epsilon_f^t c \epsilon_f^t dv + \frac{t}{2} \int_0^l \int_0^b \epsilon_c^t c \epsilon_c^t dx dy + t \int_0^l \int_0^b \sigma : \epsilon dx dy$$

avec,



Les déformations dans la plaque comprimée s'expriment par:

$$\epsilon^t = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

$$\epsilon^c = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \quad (86)$$

$$\epsilon^t = \left( 0, \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, 0 \right)$$

Nous admettons que les sections droites restent planes et normales aux fibres déformées. Les déformations de cisaillement  $\epsilon_{xy}$  dans l'expression de l'énergie de membrane doivent donc être négligées (Fig. 20).

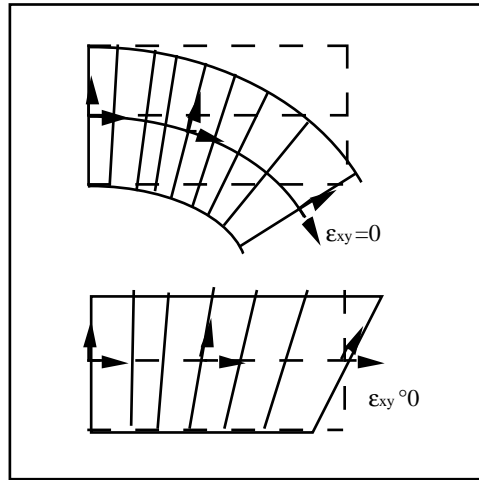


Figure 20. Effet du cisaillement sur le champ de déplacement.

Le chargement extérieur appliqué sur la plaque a pour expression :

$$\sigma = \left( 0, \left(1 - \frac{x}{b}\right) \sigma_i + \frac{x}{b} \sigma_j, 0 \right) \quad (87)$$

Les énergies s'écrivent donc:

$$U_f = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \iint_{00}^{Lb} \left( \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{(1-\nu)}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) dx dy \quad (88)$$

$$U_m = \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \iint_{00}^{Lb} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) dx dy \quad (89)$$

$$U_{ext} = \frac{t}{2} \iint_{00}^{Lb} \left( \left(1 - \frac{x}{b}\right) \sigma_i + \frac{x}{b} \sigma_j \right) \left( \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy \quad (90)$$

, en accord avec les champs de déplacements suivants :

$$[u]^t = [U_i, V_i, U_j, V_j] \quad \text{et} \quad [v]^t = [W_i, \theta_i, W_j, \theta_j]$$

Le moment critique est obtenu par la méthode de Ritz en minimisant la fonctionnelle  $\Pi$  par rapport aux degrés de liberté qui sont les inconnues ( $U_i, V_i, U_j, V_j, W_i, \theta_i, W_j, \theta_j$ ) :

$$\begin{aligned} d\Pi = & \frac{\partial \Pi}{\partial U_i} dU_i + \frac{\partial \Pi}{\partial V_i} dV_i + \frac{\partial \Pi}{\partial U_j} dU_j + \frac{\partial \Pi}{\partial V_j} dV_j \\ & + \frac{\partial \Pi}{\partial W_i} dW_i + \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_i} d\theta_i + \frac{\partial \Pi}{\partial W_j} dW_j + \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_j} d\theta_j = 0 \end{aligned} \quad (91)$$

Les matrices de rigidité en fonction des champs de déplacement sont définies par :

$$M_{em} = \frac{\partial U_m}{\partial U_i} dU_i + \frac{\partial U_m}{\partial V_i} dV_i + \frac{\partial U_m}{\partial U_j} dU_j + \frac{\partial U_m}{\partial V_j} dV_j \quad (92)$$

$$M_{ef} = \frac{\partial U_f}{\partial W_i} dW_i + \frac{\partial U_f}{\partial \theta_i} d\theta_i + \frac{\partial U_f}{\partial W_j} dW_j + \frac{\partial U_f}{\partial \theta_j} d\theta_j \quad (93)$$

$$M_{ext1} = \frac{\partial U_{ext}}{\partial U_i} dU_i + \frac{\partial U_{ext}}{\partial V_i} dV_i + \frac{\partial U_{ext}}{\partial U_j} dU_j + \frac{\partial U_{ext}}{\partial V_j} dV_j \quad (94)$$

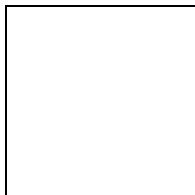
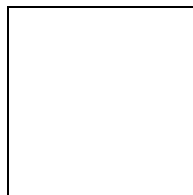
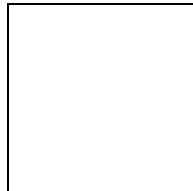
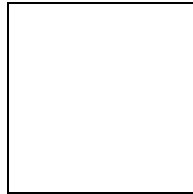
$$M_{ext2} = \frac{\partial U_{ext}}{\partial W_i} dW_i + \frac{\partial U_{ext}}{\partial \theta_i} d\theta_i + \frac{\partial U_{ext}}{\partial W_j} dW_j + \frac{\partial U_{ext}}{\partial \theta_j} d\theta_j \quad (95)$$

ou, en écriture tensorielle, fonction des matrices de rigidité et du vecteur des champs de déplacement :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{em} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{ef} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ext1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{ext2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (96)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}^t = (U_i, V_i, U_j, V_j, W_i, \theta_i, W_j, \theta_j)$$

Les matrices de rigidité ont pour expression :



Le calcul des matrices de rigidité permet d'aboutir à un système aux valeurs propres dont la résolution fournit le mode de flambement du profilé et la contrainte critique de flambement élastique. Le profilé est décomposé en un ensemble de plaques. Il est généralement admis que les

coins du profilé se comportent de manière rigide [LI 90]. Cette hypothèse permet d'effectuer l'assemblage dans un repère lié aux plaques. Le système d'équations d'équilibre (96) se découple en deux systèmes distincts.

Pour résoudre le système aux valeurs propre, il est nécessaire de déterminer l'état de chargement dans la section. Seules des contraintes de compression sont prises en considération pour le calcul du travail extérieur.

La première équation d'équilibre permet d'obtenir les déplacements  $U_i$ ,  $U_j$  et  $V_i$ ,  $V_j$  en fonction de la contrainte critique :

$$[\mathbf{M}_{em}][\mathbf{u}] + [\mathbf{M}_{ext1}][\mathbf{u}] = \mathbf{0} \text{ avec } [\mathbf{u}]^t = [U_i, V_i, U_j, V_j] \quad (97)$$

La seconde équation permet de calculer le mode propre de la section du profilé :

$$[\mathbf{M}_{ef}][\mathbf{v}] + \sigma_{cr} [\overline{\mathbf{M}}_{ext2}][\mathbf{v}] = \mathbf{0} \text{ avec } [\mathbf{v}]^t = [W_i, \theta_i, W_j, \theta_j] \quad (98)$$

où,  $[\overline{\mathbf{M}}_{ext2}]$  est la matrice de rigidité  $[\mathbf{M}_{ext2}]$  considérant une répartition de contraintes unitaires de sorte à ce que la contrainte critique,  $\sigma_{cr}$ , puisse être extraite.

La plus petite valeur propre est obtenue par la méthode des puissances inverses. Après minimisation de cette valeur par rapport à la longueur d'onde  $\lambda$  (ici  $\lambda = 1$ ), le vecteur  $[\mathbf{v}]$  exprime le mode critique. A partir de ce vecteur et du champ de déplacement, le mode d'effondrement peut être tracé (Fig. 21).

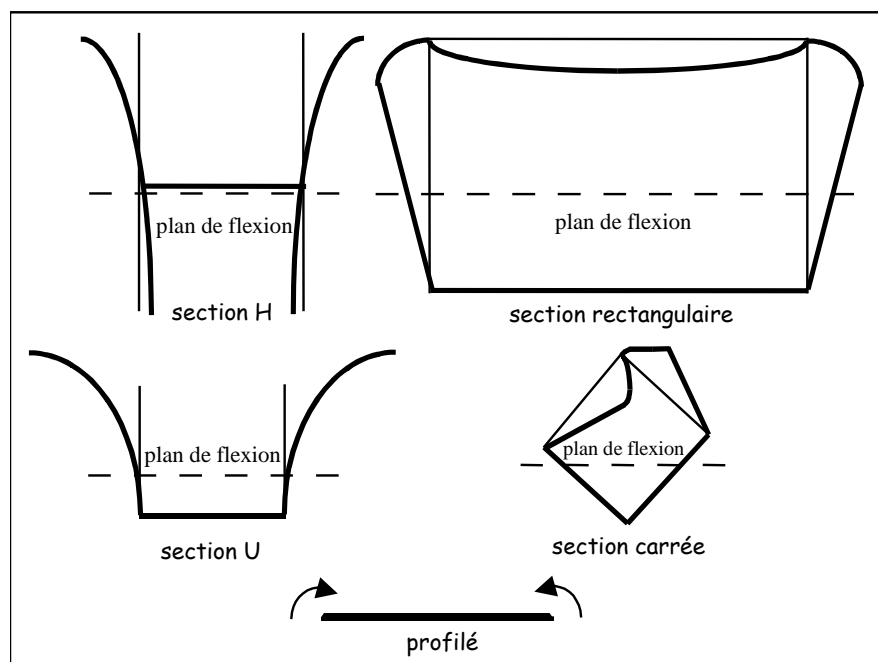


Figure 21. Représentation graphique du vecteur propre  $[\mathbf{v}]$ .

La contrainte critique obtenue n'amène pas directement à l'état d'effondrement de la structure. Après bifurcation de l'état d'équilibre, des déplacements transversaux ont pour effet de diminuer la rigidité de la section. Cette dernière peut cependant encore supporter un accroissement du moment jusqu'à apparition de déformations plastiques. Cette étape constitue le post-flambement et aboutit à la détermination de la contrainte ultime de flambement,  $\sigma_u$ .

La présente théorie n'est pas directement applicable au post-flambement car la formulation de l'énergie de membrane ne prend pas en compte les déplacements transversaux.

Le champ de déplacement, contrairement à la compression, ne peut être pré-défini car la plaque subit un chargement non constant, fonction du chargement de chaque bord.

Par conséquent, le mode de voilement est utilisé comme champ de déplacement de manière à décrire la phase de post-flambement. Nous considérons que le mode de voilement reste inchangé, seule son amplitude  $A_0$  augmente. Le déplacement transversal peut s'exprimer :

$$w = [A_0 \dots A_0] \text{ où } A_0 \text{ exprime l'amplitude} \quad (99)$$

Nous ré-exprimons le déplacement transversal:


(100)

A l'apparition du flambement, les déplacements transversaux sont nuls. Au cours du post-flambement, cette hypothèse n'est plus vraie. En effet, Markiewicz [MAR 94] montre que le carré de l'amplitude des déplacements transversaux évolue linéairement en fonction du déplacement axial subit par le profilé (Fig. 22).

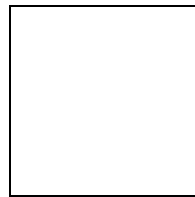
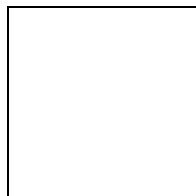


Figure 22. Evolution de l'amplitude en fonction du déplacement.

Nous allons donc exprimer l'énergie de membrane en tenant compte cette fois des déplacements transversaux. Elle sera fonction, entre autre, de l'amplitude  $A_0$ .

Nous avons l'expression suivante:

$$U_m = \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \int_s \epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{yy}^2 + 2(1-\nu)\epsilon_{xy}^2 + 2\nu\epsilon_{yy}\epsilon_{xx} ds \quad (101)$$

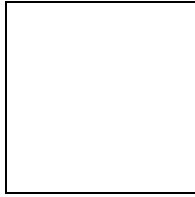


L'énergie de membrane correspond à la somme des énergies générées par :

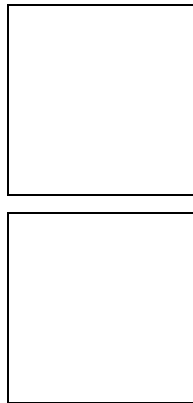
- le déplacement axial  $U_{m1}$ ,
- le raccourcissement dû au déplacement transversal  $U_{m2}$ ,

- le couplage des deux termes  $U_{m12}$ .

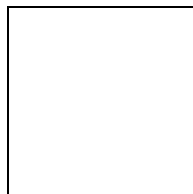
Le terme  $U_{m1}$  est défini lors de la détermination du mode propre de flexion. Les termes  $U_{m2}$ ,  $U_{m12}$  s'expriment par :



Nous remarquons que ce terme est fonction des déplacements transversaux et de l'amplitude :

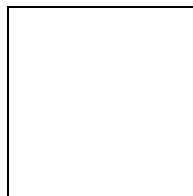


Le couplage des termes longitudinaux et transversaux s'exprime plus simplement sous forme vectorielle.  $c_{ui}$ ,  $c_{uj}$  sont fonction des déplacements transversaux des bords i et j :



(102)

Le déplacement longitudinal des bords de la plaque correspond à la superposition des déplacements engendrés par les sollicitations de flexion et de compression :



(103)

Après assemblage des différentes plaques, la fonctionnelle de l'énergie potentielle totale s'écrit :

$$\Pi = U_f(A_0) + U_m(V_0, A_0, \theta_0) - P V_0 - M \theta_0 \quad (104)$$

De ce fait, en introduisant le déplacement transversal dans l'énergie de membrane, la fonctionnelle  $\Pi$  a été reformulée sous la forme :

$$\Pi = f(A_o, \theta_o, V_o) \quad (105)$$

où,  $A_o$  est l'amplitude de la déformation,  $\theta_o$  est l'angle de flexion et  $V_o$  est le raccourcissement de l'axe neutre .

Nous obtenons l'état d'équilibre du profilé grâce à la minimisation de son énergie potentielle totale par rapport à chacune des inconnues  $A_o$ ,  $V_o$ ,  $\theta_o$  :

$$\frac{\partial U_f}{\partial A_o} = A_o [\mathbf{V}]^T [\mathbf{Mef}] [\mathbf{V}] \quad (106)$$

Soit,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_o} \Rightarrow A_o^2 = \frac{2 [c_{u1}, \dots, c_{un}] \begin{bmatrix} \theta_o z_1 + V_o \\ \theta_o z_n + V_o \end{bmatrix} + [\mathbf{V}]^T [\mathbf{Mef}] [\mathbf{V}]}{-4 f_1(W, \theta)} \quad (107)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial V_o} \Rightarrow P = A_o^2 [c_{u1}, \dots, c_{un}] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + [1, \dots, 1] [\mathbf{Memr}] \begin{bmatrix} \theta_o z_1 + V_o \\ \theta_o z_n + V_o \end{bmatrix} \quad (108)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_o} \Rightarrow M = A_o^2 [c_{u1}, \dots, c_{un}] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_n \end{bmatrix} + [z_1, \dots, z_n] [\mathbf{Memr}] \begin{bmatrix} \theta_o z_1 + V_o \\ \theta_o z_n + V_o \end{bmatrix} \quad (109)$$

$$\mathbf{Memr} = \sum_{np} \begin{bmatrix} \frac{2kb}{3\lambda_m} & \frac{kb}{3\lambda_m} \\ s & \frac{2kb}{3\lambda_m} \end{bmatrix}, k = \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \quad (110)$$

où,  $\mathbf{Memr}$  est la matrice de rigidité réduite aux termes  $V_i$  et  $V_j$ , issue de l'énergie de membrane, et sommée sur  $np$  le nombre de plaques.

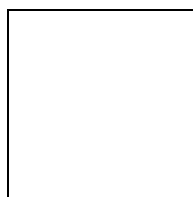
La position de la fibre neutre est obtenue de manière à annuler l'ensemble des efforts dans la section. Les équations (107), (108), (109) sont ré-exprimées dans le repère de description de la section:

$$z_i = Z_i - Z_f \quad (111)$$

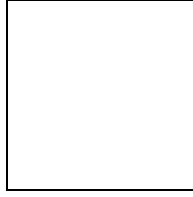
Où,  $Z_f$  est la position de la fibre neutre définie dans le repère de description de la section, et  $Z_i$  est la position courante, définie dans le repère de description de la section.

Après substitution de (107) dans (108) et en supposant que l'effort P est nul, nous obtenons l'équation de la fibre neutre :

$$(112)$$





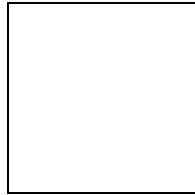


Lorsque le moment atteint sa valeur critique, des déplacements transversaux commencent à apparaître. La droite de post-flambement est obtenue par introduction des équations (112) et (107) dans (109). Après le voilement des parois du profilé, la section continue à supporter des efforts supplémentaires. Le moment suit la droite de post-flambement jusqu'à ce que des déformations plastiques apparaissent dans la section. Le moment ultime s'obtient en calculant le premier point de plastification sur la droite de post-flambement. Le critère de von Mises en contraintes planes est utilisé. Il s'exprime par:

$$\frac{\sigma_y^2(1-\nu^2)}{E^2} = \frac{I}{4} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 (1-\nu+\nu^2) + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 (1-\nu+\nu^2) + \frac{I}{4} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (4\nu-1+\nu^2) \quad (113)$$

En remplaçant les expressions de  $w$  et de  $v$ , le critère de von Mises s'exprime, dans le cas d'une plaque, par :

$$(114)$$



La position  $x$  est déterminée numériquement de manière à maximiser la contrainte.

Cependant, dans le cas de sections à parois épaisses, des déformations plastiques apparaissent avant l'instabilité de flambement. Le comportement élastique est alors suivi par une phase élasto-plastique. En effet, les déformations plastiques peuvent se localiser dans la zone comprimée ou dans la zone tendue du profilé. Des plaques flambent élastiquement alors que d'autres flambent plastiquement. Le chargement augmente jusqu'à apparition de déplacements transversaux qui initient l'instabilité. Dans ce cas, nous suivons la même démarche que précédemment et appliquons la théorie proposée par Stowell [STO 48], avec une condition d'incompressibilité du matériau.

L'énergie de flexion prend la forme suivante :

$$U_f = \frac{E_s t^2}{18} \iint_{00}^{Lb} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \left( \frac{1}{4} + \frac{3E_t}{4E_s} \right) + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \quad (115)$$

où, les modules sécant et tangent,  $E_s$  and  $E_t$ , sont déterminés à partir de la courbe de comportement du matériau (Fig. 23).

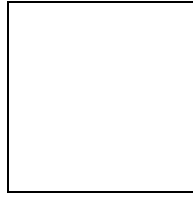


Figure 23. Loi de comportement du matériau.

La contrainte variant linéairement dans la plaque, le module sécant a pour expression :

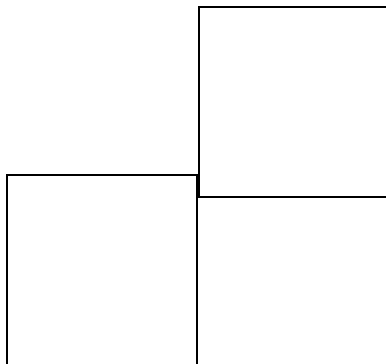
$$E_{sec} = \left(1 - \frac{x}{b}\right) E_{secim} + \frac{x}{b} E_{secjm} \quad (116)$$

Comme pour le cas élastique, après avoir exprimé l'énergie potentielle totale, nous dérivons cette expression par rapport à chacune des inconnues pour obtenir l'état d'équilibre :

$$[\mathbf{M}_{ef}] [\mathbf{v}] + \sigma_{cr} [\mathbf{M}_{ext2}] [\mathbf{v}] = \mathbf{0} \quad (117)$$

avec  $[\mathbf{v}] = [W_i, \theta_i, W_j, \theta_j]^t$

La matrice de rigidité en flexion plastique s'exprime par :



Lors de l'assemblage des matrices, les plaques sont subdivisées de manière à ce que leurs bords correspondent à la position où la déformation provoque une variation du module tangent.

Dans ce cas de flambement plastique, la fonctionnelle  $\Pi$  s'exprime :

$$\Pi(W_i, \theta_i, W_j, \theta_j) = U_f + \frac{t}{2} \int_s \sigma : \varepsilon ds \quad (118)$$

Comme pour le flambement élastique, un système d'équations d'équilibre et une résolution aux valeurs propres sont utilisés pour déterminer la contrainte critique de flambement plastique, ainsi que le mode de flambement. Cependant, du fait des non-linéarités matérielles, la procédure de résolution est itérative avec mise à jour du champ de contraintes en accord avec l'état de plastification courant dans la section du profilé.

### 3.2. Phase de post-effondrement

Au-delà du chargement maximum, la structure ne peut plus résister et la ruine intervient. Nous observons alors une réduction du moment résistant et l'apparition de grandes déformations plastiques en flexion. Cette phase qui conduit à la ruine totale de la structure est appelée phase de post-effondrement.

De nombreux auteurs se sont penchés sur la détermination de la courbe de post-effondrement. Certains auteurs, comme Cimpoeru et Murray [CIM 93], ont utilisé des modèles empiriques déterminés à partir d'essais. Mahmood et Paluszny [MAH 81] ont proposé un modèle semi-empirique basé sur un modèle régressif et sur l'étude de la stabilité du profilé en compression et en flexion. Ceux-ci ont abouti au développement des progiciels VCRUSH pour l'étude du comportement global des structures [MAH 86], [HIK 86] et SECOLLAPSE pour la détermination des caractéristiques de post-effondrement des différents composants [MAH 88a], [MAH 88b]. D'autres ont proposé des méthodologies issues de l'observation des déformées. Ces techniques supposent que les déformations plastiques se localisent dans différentes zones reliées entre elles par des parties dont le comportement élastique peut être négligé. Il devient alors possible de décrire la section déformée par un modèle purement géométrique. Murray [MUR 81] a utilisé ce type de modèle pour étudier le comportement de profilés soumis à un flambement global. Ce modèle a été modifié pour pouvoir étudier le comportement de plusieurs types de raidisseurs de plaques [BHA 89], [HUA 93], [LOU 94]. Cependant, une description géométrique seule peut conduire à négliger certaines dissipations énergétiques dues notamment à l'apparition de phénomènes d'extension. Pour des profilés soumis à un chargement en compression axiale, Wierzbicki et Abramowicz [ABR 89] ont montré que l'énergie dissipée en extension est égale à un tiers de toute l'énergie dissipée par la structure.

Kecman [KEC 79] a proposé un modèle qui permet de simuler le comportement d'un profilé rectangulaire en flexion (Figs. 24 et 25). Le modèle géométrique est défini à partir du faciès expérimental. Il est composé de 8 lignes de pliage stationnaires et de 8 lignes de pliage mobiles. L'énergie dissipée par ces dernières dépend de la formulation du rayon de courbure. A partir d'une campagne d'essais, Kecman [KEC 83] a exprimé une relation empirique pour la formulation du rayon de courbure des lignes inclinées mobiles. Le modèle de Kecman est limité à des sections rectangulaires avec un plan de flexion situé au niveau de la plaque inférieure. Par cette hypothèse, Kecman considère que la section ne présente que des contraintes de compression au cours de la déformation, ce qui est acceptable dans le cas présent. Néanmoins, pour des sections de forme plus complexe, cette hypothèse n'est plus satisfaisante car elle ne permet pas de gérer les déformations plastiques qui apparaissent dans la zone tendue. La plaque la plus sollicitée est parallèle au plan de flexion. Son mode de déformation se décompose en trois lignes de pliage stationnaires qui restent parallèles tout au long de l'écrasement. Par la suite celle-ci sert de référence pour la description géométrique et cinématique des plaques verticales.

Abramowicz [ABR 81] a amélioré le modèle de Kecman en quantifiant l'énergie dissipée par le roulement du coin dans la section. Abe [ABE 90] a étudié l'influence de la courbure initiale de la poutre sur l'énergie dissipée dans la rotule plastique. Plus tard, Anceau [ANC 94] a étendu le modèle proposé par Kecman afin de caractériser le comportement de sections en " $\Omega$ " (Fig. 26).

Il a également proposé deux modèles pour obtenir la réponse en flexion de profilés de type "U" (Fig. 27) et "H" (Figs. 28 et 29). Ce dernier est caractérisé par l'apparition de zones d'extension dans la paroi tendue.

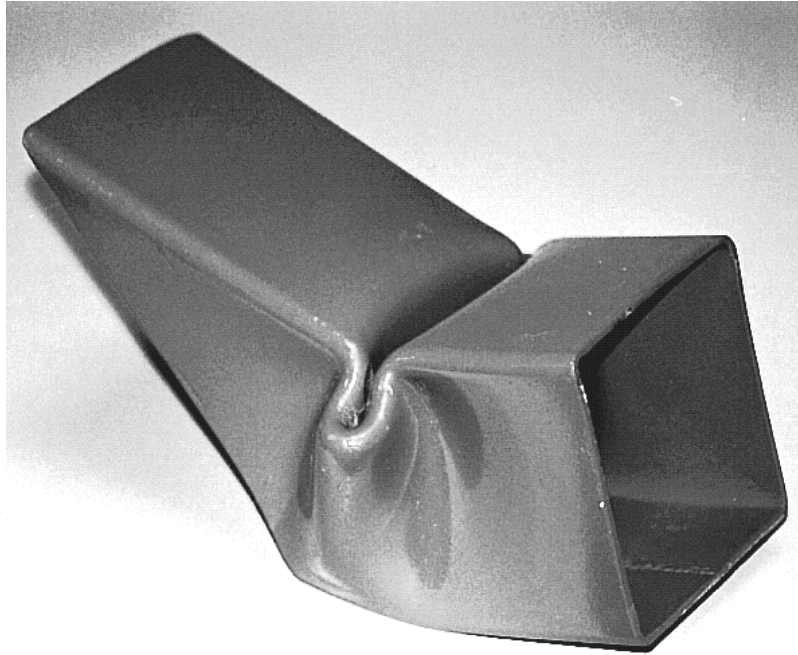


Figure 24. Faciès de déformation expérimental d'un profilé rectangulaire.

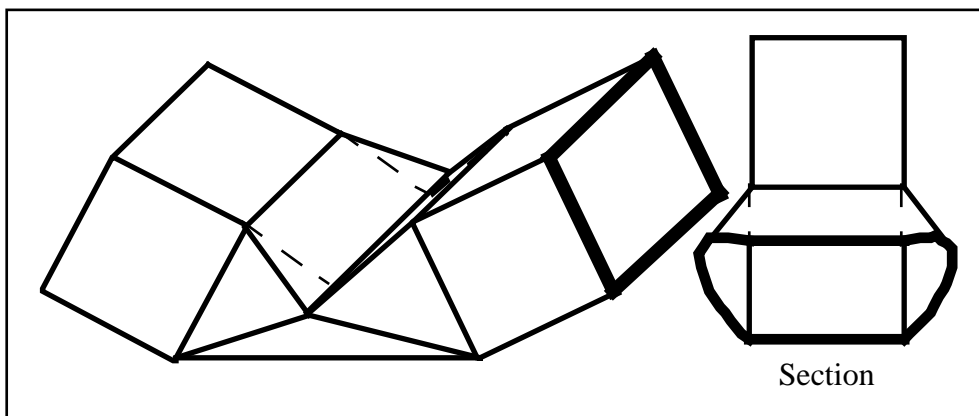


Figure 25. Modèle de Kecman [KEC 79].

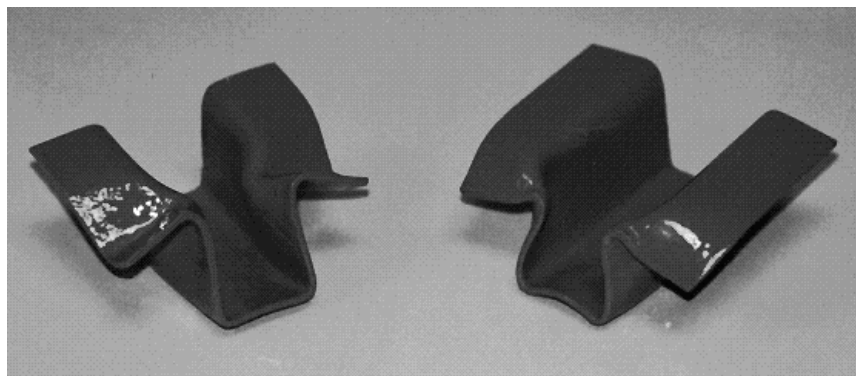


Figure 26. Faciès de déformation expérimental d'un profilé à section "Ω".

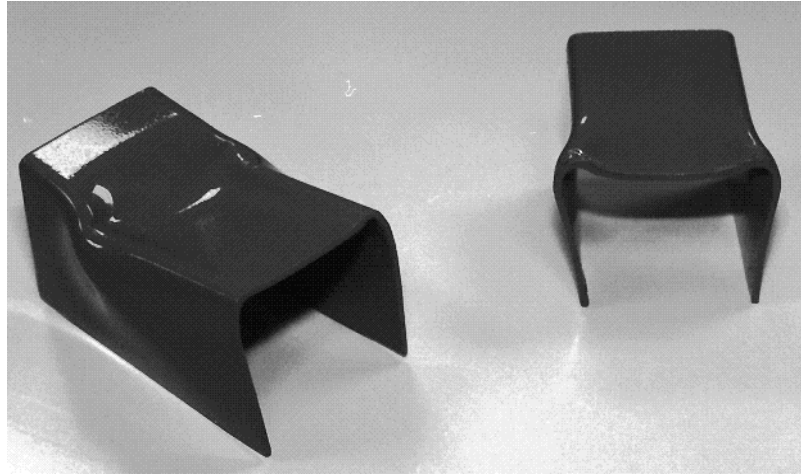


Figure 27. Faciès de déformation expérimental d'un profilé à section "U".

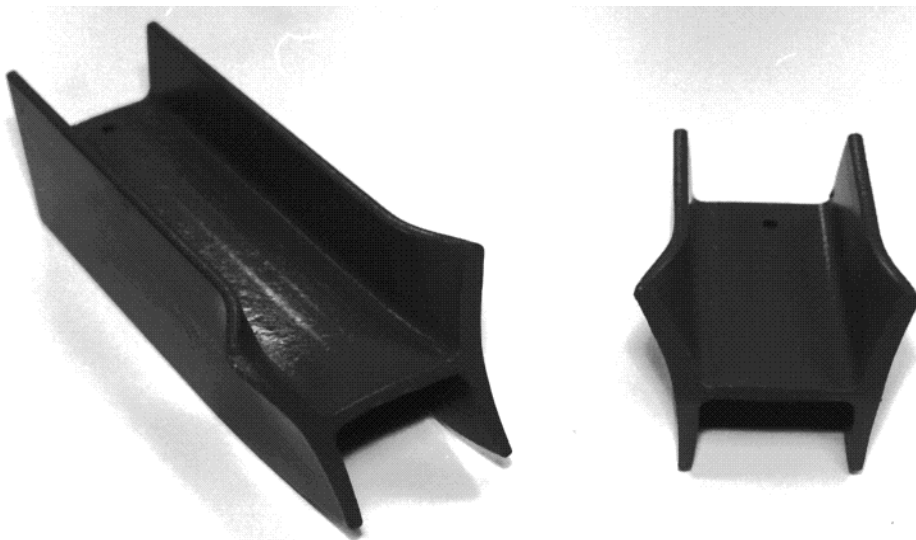


Figure 28. Faciès de déformation expérimental d'un profilé à section "H".

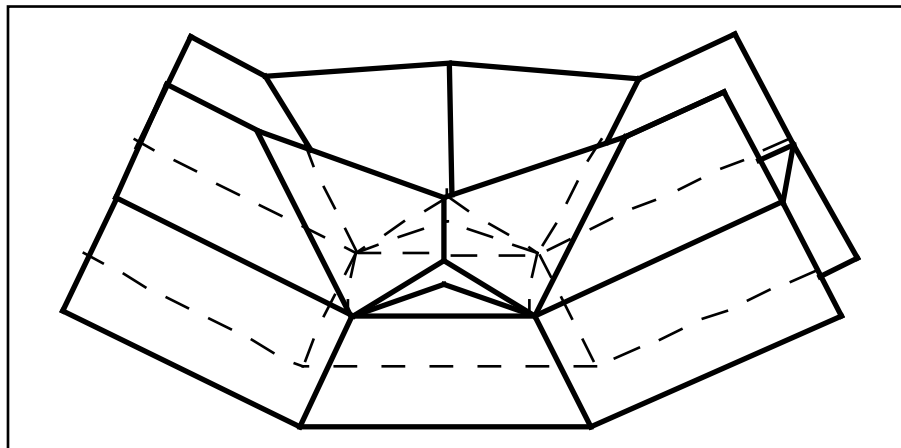


Figure 29. Modèle de Anceau pour les profilés à section "H" [ANC 94].

Parallèlement aux travaux de Kecman, Seki [SEK 78] a proposé un modèle pour des profilés de section rectangulaire soumis à un chargement combiné de compression et de flexion (Fig. 30).

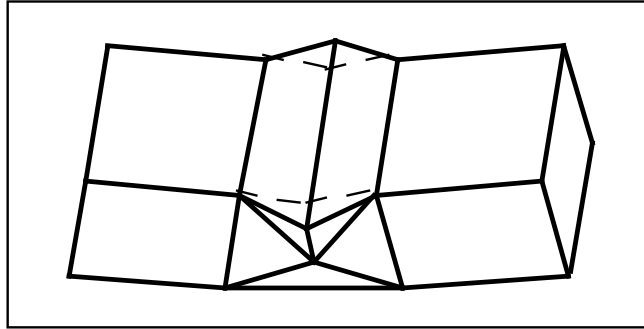


Figure 30. Modèle de Seki [SEK 78].

Ce modèle a été repris par Wierzbicki et Abramowicz [WIE 94a] pour étudier, dans le cas d'un chargement en flexion, la répartition des contraintes dans la section. Ceux-ci, qui sont à l'origine des modèles cinématiques en compression et du concept de super élément de pliage [ABR 89], [WIE 89], ont développé le logiciel CRASH-CAD de caractérisation du comportement en compression et en flexion des profilés à parois minces. Pour la partie flexion, ils ont déduit qu'il est possible de déterminer le comportement d'un profilé en flexion à partir de l'étude en compression des divers éléments coins qui le composent [WIE 94b]. Leurs développements sont basés sur un modèle cinématique généralisé en compression [WIE 93] [ABR 83]. Ce modèle décompose la section en éléments coins. Chaque élément coin subit un écrasement en deux phases : une première, durant laquelle les déplacements sont quasi-inextensibles [WIE 83] et une seconde, caractérisée par l'apparition de cônes d'extension (Fig. 31) [HAY 84]. En combinant différents comportements d'éléments coins et en les assemblant pour reconstituer la section, ils sont donc parvenus au développement d'un modèle généralisé en flexion, également appelé super élément poutre (Fig. 32).

A l'issue de cette revue bibliographique sur les modèles de caractérisation du comportement en flexion des profilés, nous constatons que, mis à part le super élément poutre de Wierzbicki, les modèles développés, qu'ils soient empiriques, semi-empiriques, à description géométrique ou cinématique, sont limités à des sections particulières et notamment des sections à angles droits. Une nouvelle géométrie de section implique le développement d'un nouveau modèle, ce qui est très pénalisant et conduit à une base de données de gestion très difficile.

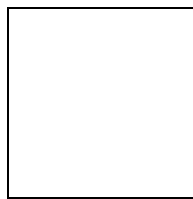


Figure 31. Modèle mixte généralisé de Wierzbicki et Abramowicz [WIE 89].

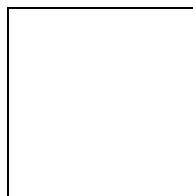


Figure 32. Différents modes de déformation de l'élément super poutre [WIE 93].

Le modèle super élément poutre, généralisé aux sections à angles arbitraires, est basé sur un modèle compression. Cependant, la compression engendre un raccourcissement identique pour toutes les plaques. Nous pouvons donc extrapoler ce raccourcissement à celui généré par la

flexion, en considérant que la plaque la plus comprimée du modèle de Kecman se comporte de la même manière qu'une des plaques d'un modèle en compression. Il devient alors possible de décomposer la section en éléments coins. Dans ce cas, la continuité entre les éléments n'est fonction que de la demi-longueur d'onde d'écrasement ( $a/2$ ) et du déplacement longitudinal. Or, dans le cas de la flexion, cette hypothèse n'est plus vraie car les coins subissent des déplacements qui sont fonction de leur position par rapport à la fibre neutre (Fig. 33).

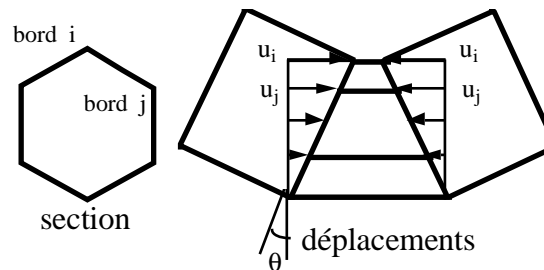


Figure 33. Déplacements dus à la flexion.

Afin de palier les limitations des modèles existants, Markiewicz et Payen ont proposé de développer un modèle flexion généralisé aux sections de géométrie arbitraire [MAR 99][PAY 96]. Bien que les différents mécanismes de déformation présentés ci-dessus soient dissemblables, les faciès correspondant nous permettent d'appréhender le comportement en flexion des profilés standards. Les modèles présentés se limitant à des sections à angles droits, ils n'est pas possible de les étendre directement à une section arbitraire avec des angles différents de  $90^\circ$ . Néanmoins, nous pouvons souligner certaines caractéristiques cinématiques communes à tous ces modèles :

- le plan central de la rotule constitue un plan de symétrie, pour les mécanismes de déformation,
- la longueur d'onde est commune à toutes les plaques composant le profilé,
- les lignes de pliage qui définissent le bord de la rotule sont stationnaires, par conséquent la longueur d'onde ne varie pas durant le processus d'écrasement,
- toutes les lignes de pliage contenues dans le plan de symétrie sont stationnaires,
- les lignes de coin colinéaires au chargement se transforment en lignes de pliage mobiles.

L'ensemble de ces caractéristiques sert de base pour le développement du modèle généralisé. Ce dernier est fondé sur la décomposition de la section en plusieurs plaques reliées entre elles par des conditions de continuité géométrique et cinématique. Le comportement de ces plaques est obtenu à partir de l'étude du mode de voilement présenté dans le paragraphe précédent. Après avoir fixé le mode d'effondrement cinématique, l'étude du profil des contraintes associées au modèle cinématique permet de déterminer la position de la fibre neutre.

Les différents tests expérimentaux et numériques montrent que les mécanismes de déformation proposés dans les modèles de Wierzbicki en compression et de Kecman en flexion offrent une bonne base pour le développement d'un modèle généralisé en flexion, moyennant les restrictions énoncées précédemment.

Comme indiqué sur la Figure 33, les coins subissent des déplacements uniformes qui dépendent de leur position par rapport à la position de l'axe neutre. Ceci souligne le fait qu'une plaque isolée subit un chargement de flexion ( $u_i \neq u_j$ ) associé à un chargement de compression axiale ( $u_j \neq 0$ ).

Par conséquent, la superposition du modèle quasi-inextensible en compression de Wierzbicki et Abramowicz [WIE 83] et du modèle en flexion de Kecman [KEC 79] nous permet

d'étudier la combinaison de leur comportement respectif (Fig. 34). Cependant, l'utilisation d'éléments coins pour décrire l'effondrement de la section en flexion provoque des discontinuités en coupant certains mécanismes plastiques du modèle de Kecman. C'est pourquoi, pour le développement d'un modèle généralisé en flexion cinématiquement admissible, la section a été décrite par des éléments plaques liés par des conditions limites.

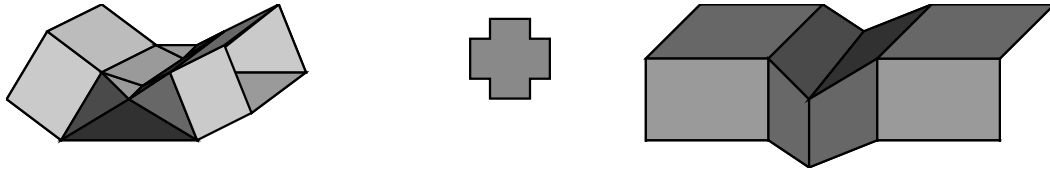


Figure 34. Superposition du modèle quasi-inextensible de Wierzbicki et Abramowicz et du modèle de Kecman.

Les composants structuraux des véhicules de transport sont principalement des profilés prismatiques assemblés par soudure par points ou extrudés. Une analyse de ces différents composants ainsi que de leurs modes de flambement souligne que l'effondrement en flexion d'un profilé de section prismatique arbitraire peut être étudié sur la base de cinq configurations de pliage élémentaires :

- pliage d'une plaque horizontale ou d'un bord libre (aile) parallèle à l'axe de flexion,
- pliage d'une plaque inclinée de type bord libre,
- pliage d'une plaque inclinée avec coin supérieur mobile se déplaçant dans la plaque inférieure,
- pliage d'une plaque inclinée avec coin supérieur mobile se déplaçant dans la plaque supérieure,
- pliage d'une plaque inclinée avec coin inférieur mobile se déplaçant dans la plaque supérieure.

Pour chaque configuration de pliage, une superposition des modèles en compression et en flexion correspondants est effectuée. Elle donne lieu à cinq mécanismes cinématiques élémentaires de plaques, dénotés *Mode 1* à *Mode 5*, qui diffèrent par leur inclinaison par rapport à l'axe neutre et la direction du déplacement des lignes de coin (Fig. 35).

Lors de l'étude d'une section transversale quelconque, le choix des différents mécanismes cinématiques est conditionné simplement à partir de l'étude du mode de flambement (voilement). Comme ces modèles diffèrent principalement par leur comportement au niveau des lignes de coin pour une plaque, la comparaison des déplacements transversaux des deux plaques qui composent la ligne de coin impose son mécanisme d'effondrement. Le mécanisme cinématique global est obtenu après assemblage de toutes les plaques.

Un exemple d'assemblage de ces mécanismes est montré à la Figure 36 pour un profilé à section rectangulaire à partir du mode de voilement obtenu. Sur cette figure, nous pouvons observer que le comportement est déterminé pour chaque coin, en comparant les déplacements transversaux des différentes plaques. Une recherche du mode cinématique correspondant à chaque plaque est effectuée parmi les cinq mécanismes de base. La section est décrite de la plaque la plus éloignée de la fibre neutre vers la plaque la plus proche.



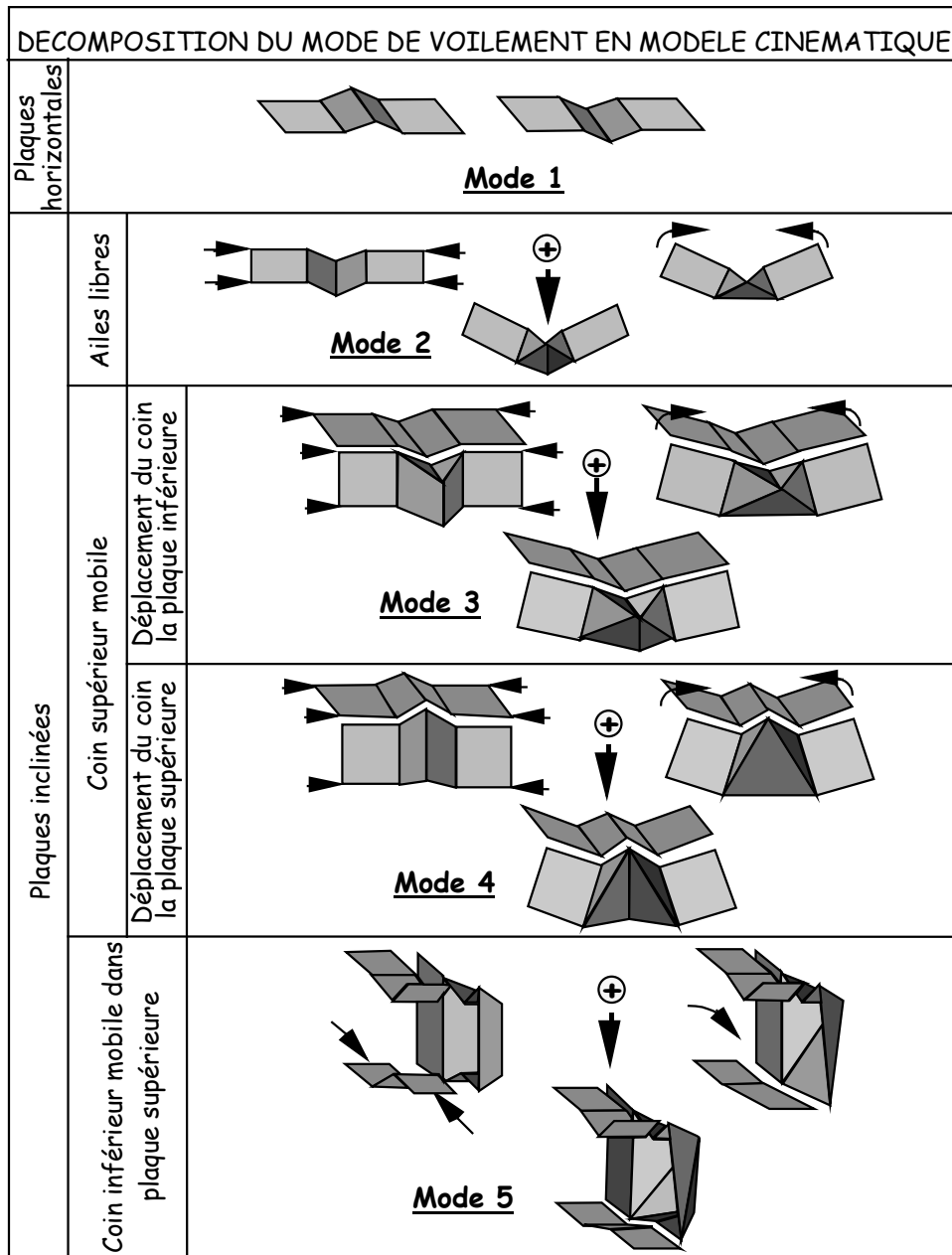


Figure 35. Superposition des modèles cinématiques élémentaires en compression et en flexion.

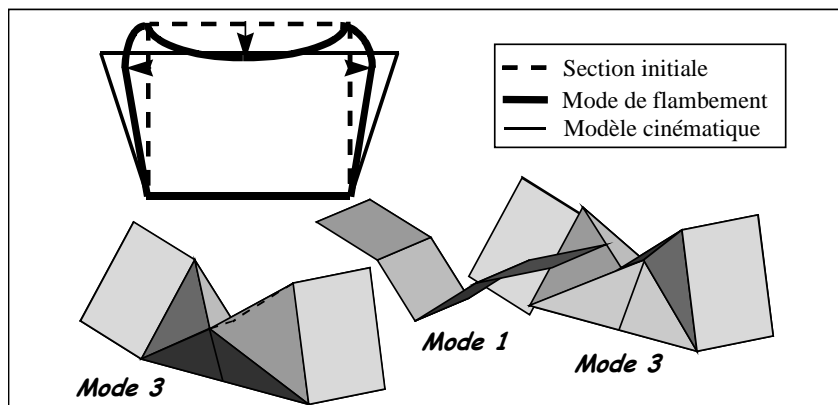


Figure 36. Exemple d'assemblage des différents mécanismes de base pour un profilé à section rectangulaire.

Une description géométrique et une description cinématique sont ensuite réalisées dans le

but de définir la continuité cinématique entre les plaques et de quantifier l'énergie dissipée dans les différents mécanismes plastiques de chacun des cinq modèles élémentaires.

### Description géométrique

Le plan de symétrie de la rotule est un plan particulier où les déplacements transversaux sont maximaux. Dans ce plan, un modèle géométrique simple permet de décrire correctement le comportement cinématique de la paroi du profilé. Pour cela, le bord de la rotule est projeté dans le plan de symétrie ( $\pi$ ) (Fig. 37). Après projection, la plaque étudiée est représentée par une droite de longueur ( $b_2$ ) et d'inclinaison ( $\psi_2$ ). Ces paramètres qui sont fonction de la largeur ( $b$ ) et de l'inclinaison ( $\psi$ ) de la plaque évoluent en fonction du demi-angle de pliage ( $\theta$ ) :

$$b_2 = b \sqrt{\cos^2(\psi) + \sin^2(\psi) \cos^2(\theta)}$$

$$\psi_2 = \tan^{-1}(\tan(\psi) \cos(\theta))$$
(119)

Quel que soit le mode étudié, le pliage de la rotule provoque les déplacements  $\tau$  et  $\tau'$  des bords de la plaque. Ces déplacements s'expriment en fonction du demi-angle de flexion  $\theta$  et de la position par rapport au plan de flexion (Fig. 38) :

$$\tau = y_i \sin(\theta)$$

$$\tau' = y_j \sin(\theta) = \tau + b \sin(\theta) \sin(\psi)$$
(120)

Les bords supérieur et inférieur de la plaque sont exprimés dans le plan  $\pi$  par les relations suivantes :

$$A'G = \sqrt{a\tau' - \tau^2}$$

$$D'E = \sqrt{a\tau - \tau^2}$$
(121)

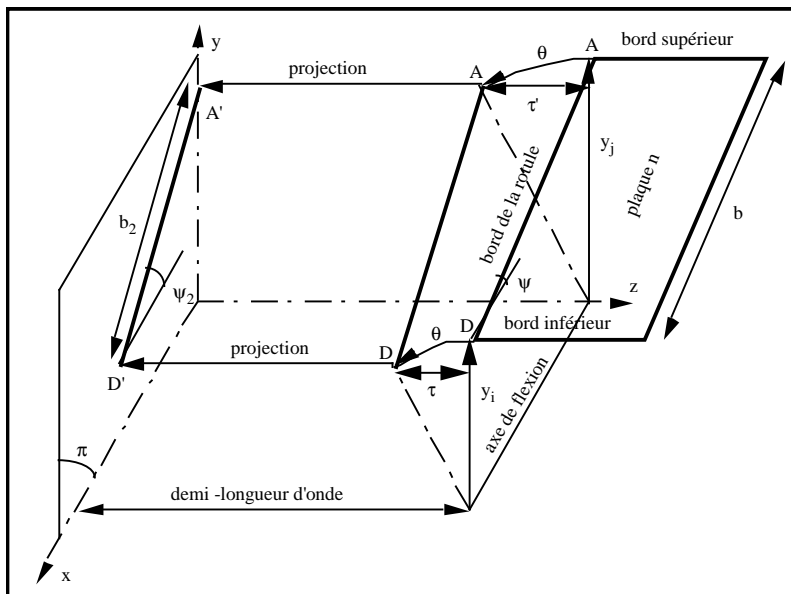


Figure 37. Projection des caractéristiques de flexion dans le plan de symétrie.

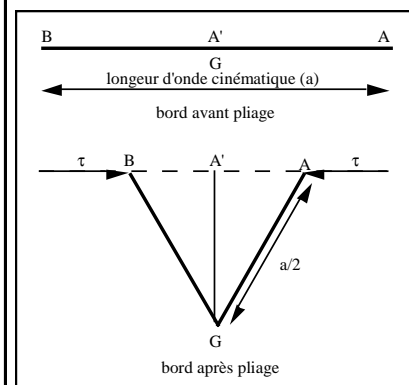


Figure 38. Déflexion du bord supérieur.

### Description cinématique

En vue de définir le moment instantané de flexion et gérer la position de la fibre neutre, le théorème des puissances virtuelles est utilisé. Celui-ci consiste à effectuer l'équilibre local à chaque instant entre la puissance externe et la puissance dissipée dans les zones de déformation. L'utilisation de dérivées partielles par rapport à l'angle de pliage (paramètre temporel) permet d'exprimer la puissance en fonction de la vitesse angulaire de pliage :

$$\dot{W}_{\text{int}} = M_o L_h \dot{\alpha} \text{ avec } \dot{\alpha} = f(\alpha) \dot{\theta} \quad (122)$$

Après avoir quantifié les puissances dissipées dans toutes les zones déformées, l'équilibre des puissances donne directement le moment de post-effondrement :

$$M \dot{\theta} = \dot{W}_{\text{int}} = \dot{W}_{\text{ext}} = f_2(\theta) \dot{\theta} \Rightarrow M = f_2(\theta) \quad (123)$$

Dans l'équation (112),  $M_o$  représente le moment parfaitement plastique par unité de longueur, exprimé en fonction d'une contrainte d'écoulement équivalente assumant un comportement matériel rigide-plastique avec écrouissage linéaire.

En suivant l'ordre de la décomposition du mode de voilement en modèle cinématique, présenté à la Figure 39, les paragraphes suivants présentent, pour chaque mécanisme, le résultat du calcul des puissances dissipées dans les différentes zones de déformation.

### Plaques horizontales (Mode 1)

Le modèle cinématique d'une plaque horizontale (Fig. 39) est représenté par trois lignes de pliage horizontales stationnaires (AD, GE, BF), étudiées dans le plan de symétrie  $\pi$ .

$\rho_1$  et  $\rho_2$  représentent les paramètres de continuité cinématique avec les deux plaques adjacentes aux points E et G. Ils expriment respectivement les pentes sur le bord droit et le bord gauche. Etant donné que les lignes de pliage restent parallèles pendant le processus de déformation, ces deux quantités sont invariantes et égales à zéro. Utilisant des relations trigonométriques dans le triangle (AGA'), la puissance totale dissipée est exprimée :

$$\dot{W}_{\text{int}} = 4M_o b \frac{\frac{2\dot{\tau}}{a}}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2\tau}{a}\right)}} \pm 2M_o b \dot{\theta} \quad (124)$$

Le signe dans l'équation (124) dépend du sens de déplacement du centre de la plaque par rapport au sens de flexion.

SUPERPOSITION DES MECANISMES EN COMPRESSION ET EN FLEXION		PROJECTION DANS LE PLAN $\pi$	MODE CINEMATIQUE
plaques horizontales	<p><b>Mode 1</b></p> <p>Position haute Position basse</p>	<p><math>\psi_0=0 \Rightarrow \psi_2=0, b_2=0, \rho_1=0, \rho_2=0</math></p>	
	<p><b>Mode 2</b></p>		
plaques inclinées	<p>déplacement du coin dans la plaque inférieure</p> <p><b>Mode 3</b></p>		
	<p>déplacement du coin dans la plaque supérieure</p> <p><b>Mode 4</b></p>	<p>plaque supérieure</p>	
	<p>Coin inférieur mobile dans la plaque supérieure</p> <p><b>Mode 5</b></p>		

Figure 39. Modèles géométriques et cinématiques élémentaires extraits de la superposition compression/flexion.

### Plaques inclinées

**Ailes libres (Mode 2).** Les ailes libres (Fig. 39) sont présentes dans les profilés à sections ouvertes ou dans les profilés fermés obtenus par assemblage de tôles mises en forme. Elles se caractérisent par le fait qu'un des bords n'est connecté à aucune autre plaque. La décomposition du mécanisme de déformation d'une telle paroi nécessite l'introduction de 5 lignes de pliage stationnaires (AD, DG, GE, GF, BF).

La puissance dissipée dans les lignes de pliage stationnaires BF et AD est exprimée en fonction du déplacement du bord supérieur (triangle A'AG). La puissance associée à la variation d'angle engendrée par la rotation des portions du profilé situées de part et d'autre de la rotule s'ajoute ou se soustrait en fonction du sens de déplacement du point G :

$$\dot{W}(BF, AD) = \frac{4bM_o \left( \frac{\dot{\tau} + b \sin(\psi) \cos(\theta) \dot{\theta}}{a} \right)}{\sqrt{1 - \left( 1 - \frac{2\tau + 2b \sin(\psi) \sin(\theta)}{a} \right)^2}} \pm 2b \cos(\psi) M_o \dot{\theta} \quad (125)$$

La puissance dissipée dans la ligne de pliage stationnaire GE est fonction du déplacement du bord inférieur :

$$\dot{W}(GE) = \frac{4bM_o \left( \frac{\dot{\tau}}{a} \right)}{\sqrt{1 - \left( 1 - \frac{2\tau}{a} \right)^2}} \quad (126)$$

La différence d'amplitude de flexion entre les bords supérieur et inférieur de la plaque nécessite l'intervention de deux lignes de pliage stationnaires supplémentaires GD et DF. Par conséquent, l'angle entre les facettes GED et GAD constitue un nouveau paramètre qui dépend de l'angle de pliage au niveau des lignes GE, AD et BF. La puissance dissipée dans les lignes de pliage DG et FG a donc pour expression :

$$\dot{W}(DG, FG) = 2M_o \sqrt{\left( \frac{a}{2} \right)^2 + b^2} \dot{\Omega} \quad (127)$$

où  $\dot{\Omega}$  est la vitesse de rotation de la ligne de pliage GD.

Finalement, la puissance totale dissipée dans la plaque a pour expression :

$$\dot{W}_{int} = \dot{W}(BF, AD) + \dot{W}(GE) + \dot{W}(GD, FG) \quad (128)$$

**Coin supérieur mobile.** Avec ce mécanisme, un nouvel élément dissipatif est introduit : « la ligne de coin ». Le sens de déplacement de celle-ci est conditionné par le mode de flambement. Par conséquent, deux configurations sont possibles : dans la plaque inférieure ou supérieure.

### Déplacement de la ligne de coin dans la plaque inférieure (Mode 3)

La superposition des mécanismes plastiques en compression axiale et en flexion pure a permis d'obtenir le faciès représenté à la Figure 39. Par projection dans le plan  $\pi$ , ce modèle de plaque est décrit par :

a) - deux lignes de pliage stationnaires, de longueur constante AD et BF, dont la puissance dissipée s'exprime :

$$\dot{W}(AD, BF) = \frac{4bM_o \left( \frac{\dot{\tau} + b' \sin(\psi) \cos(\theta) \dot{\theta} + \dot{b}' \sin(\psi) \sin(\theta)}{a} \right)}{\sqrt{1 - \left( 1 - \frac{2\tau - 2b' \sin(\psi) \sin(\theta)}{a} \right)^2}} \pm 2b \cos(\psi) M_o \dot{\theta} \quad (129)$$

b) - deux lignes de pliage stationnaires, de longueur variable GC et CE définie en fonction de la position (b') du coin C, dont la puissance dissipée s'exprime :

$$\dot{W}(GC) = \frac{4(b-b')M_o \left( \frac{\dot{\tau} + b \sin(\psi) \cos(\theta) \dot{\theta}}{a} \right)}{\sqrt{1 - \left( 1 - \frac{2\tau - 2b \sin(\psi) \sin(\theta)}{a} \right)^2}} \quad (130)$$

$$\dot{W}(CE) = \frac{4b'M_o \left( \frac{\dot{\tau}}{a} \right)}{\sqrt{1 - \left( 1 - \frac{2\tau}{a} \right)^2}} \quad (131)$$

c) - deux lignes de pliage mobiles AC et BC qui dissipent de l'énergie par roulement dans la matière. Cette énergie s'ajoute à l'énergie induite par la rotation relative entre les facettes (AGC, ADC) et les facettes (BGC, BFC). Cette dernière est cependant négligeable comparativement à l'énergie de roulement qui a pour expression :

$$\dot{W}(AC, BC) = \frac{2M_o}{r} b' \sqrt{\left( \frac{a}{2} \right)^2 + (b-b')^2} = \frac{I(AC, BC)}{r} \quad (132)$$

d) - une section de surface toroïdale qui donne lieu à une déformation de la matière en extension. En effet, la différence d'angle qui apparaît au cours du pliage entre les lignes mobiles AC et BC provoque une discontinuité du champ de vitesse au point C. Les conditions cinématiques nécessitent la présence d'une zone de transition de forme toroïdale entre ces deux lignes pliages. L'extension dans cette zone se développe selon la direction circonférentielle [WIE 83]. La puissance dissipée dans la zone toroïdale a pour expression :

$$\dot{W}(tore) = 8 \frac{M_o}{t} r b' \left( \frac{\pi - \phi}{2} \right) (\sin(\gamma) + \sin(\gamma + \alpha_1 + \alpha_2)) = I(tore)r \quad (133)$$

$$\text{où, } \phi = 2a \sin \left( \frac{\frac{a}{2} - \tau'}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + (b-b')^2}} \right), \gamma = \text{atan} \left( \frac{\sqrt{a\tau' - \tau'^2}}{b-b'} \right), \alpha_1 = \rho_1 \text{ et } \alpha_2 = \pi - \rho_2$$

$\rho_1$  et  $\rho_2$  étant les paramètres de continuité cinématique avec les plaques adjacentes.

La consommation énergétique de la zone toroïdale et des lignes inclinées mobiles AC et BC est fonction du petit rayon  $r$  de la surface toroïdale. Au cours du processus de déformation, ce rayon évolue de manière à minimiser la puissance dissipée [HIL 86] :

$$\frac{\partial (\dot{W}(AC, BC) + \dot{W}(tore))}{\partial r} = 0 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{I(AC, BC)}{I(tore)}} \quad (134)$$

e) - pour compléter le mécanisme de pliage de la plaque, il reste deux lignes de pliage inclinées DC et FC, dont la puissance dissipée s'exprime :

$$\dot{W}(DC, FC) = 2M_o \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b'^2} \dot{\Omega} \quad (135)$$

Finalement, la puissance totale dissipée dans la plaque a pour expression :

$$\dot{W}_{\text{int}} = \dot{W}(AD, BF) + \dot{W}(GC) + \dot{W}(CE) + \dot{W}(AC, BC) + \dot{W}(tore) + \dot{W}(DC, FC) \quad (136)$$

#### Déplacement de la ligne de coin dans la plaque supérieure (Mode 4)

Dans ce cas de figure, la ligne de coin balaye la plaque supérieure. Ce mode est représenté à la Figure 39 et est décrit par les mécanismes plastiques suivants pour lesquels la puissance dissipée est calculée selon le même schéma que précédemment :

a) - deux lignes de pliage stationnaires de longueur constante AD et BF :

$$\dot{W}(AD, BF) = \frac{4bM_o \left( \frac{\dot{\tau} + (b+b') \sin(\psi) \cos(\theta) \dot{\theta} + b' \sin(\psi) \sin(\theta)}{a} \right)}{\sqrt{1 - \left( 1 - \frac{2\tau - 2(b+b') \sin(\psi) \sin(\theta)}{a} \right)^2}} \pm 2bM_o \cos(\psi) \dot{\theta} \quad (137)$$

b) - une ligne de pliage stationnaire CE, de longueur variable exprimée en fonction de la position ( $b'$ ) du coin C :

$$\dot{W}(CE) = \frac{4(b+b')M_o \left( \frac{\dot{\tau}}{a} \right)}{\sqrt{1 - \left( 1 - \frac{2\tau}{a} \right)^2}} + \frac{4(-b')M_o \left( \frac{\dot{\tau} + b \sin(\psi) \cos(\theta) \dot{\theta}}{a} \right)}{\sqrt{1 - \left( 1 - \frac{2\tau - 2b \sin(\psi) \sin(\theta)}{a} \right)^2}} \quad (138)$$

c) - deux lignes de pliage mobiles AC et BC :

$$\dot{W}(AC, BC) = \frac{2M_o}{r} \dot{b}' \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b'^2} = \frac{I(AC, BC)}{r} \quad (139)$$

d) - une surface toroïdale en extension dans la direction circonférentielle :

$$\dot{W}(tore) = 8 \frac{M_o}{t} r \dot{b}' \left(\frac{\pi - \phi}{2}\right) (\sin(\gamma) + \sin(\gamma + \alpha_1 + \alpha_2)) = I(tore)r \quad (140)$$

e) - deux lignes de pliage inclinées DC et FC :

$$\dot{W}(DC, FC) = 2M_o \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (b + b')^2} \dot{\Omega} \quad (141)$$

Par conséquent, la puissance totale dissipée dans la plaque a pour expression :

$$\dot{W}_{int} = \dot{W}(AD, BF) + \dot{W}(CE) + \dot{W}(AC, BC) + \dot{W}(tore) + \dot{W}(DC, FC) \quad (142)$$

**Déplacement du coin inférieur dans la plaque supérieure (Mode 5).** Les modèles précédents ont concerné le comportement du bord supérieur. Pour le bord inférieur de la plaque, la continuité cinématique doit également être assurée. Seule la puissance dissipée par le roulement de la ligne de coin DC'F est prise en compte. Utilisant la projection dans le plan  $\pi$  de symétrie (Fig. 39), ce mécanisme est décrit par :

a) - deux lignes de pliage inclinées mobiles DC' et FC' :

$$\dot{W}(DC', FC') = \frac{2M_o}{r} \dot{b}' \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b'^2} = \frac{I(DC', FC')}{r} \quad (143)$$

b) - une section de surface toroïdale qui provoque de l'extension dans la direction circonférentielle :

$$\dot{W}(tore) = 8 \frac{M_o}{t} r \dot{b}' \left(\frac{\pi - \phi}{2}\right) (\sin(\gamma) + \sin(\gamma + \alpha_1 + \alpha_2)) = I(tore)r \quad (144)$$

Par conséquent, la puissance totale dissipée dans la plaque a pour expression :

$$\dot{W}_{int} = \dot{W}(DC', FC') + \dot{W}(tore) \quad (145)$$

### Assemblage des plaques

Après avoir déterminé le mode de voilement (pré-effondrement), nous avons vu que la section est décomposée sous la forme d'un assemblage de plaques. L'étude de ses bords permet de définir le mécanisme d'effondrement. Lorsque celui-ci est fixé, l'assemblage des plaques horizontales et des ailes libres est effectué pour déterminer les paramètres de continuité géométrique et cinématique de départ. Dans un deuxième temps, l'assemblage des autres plaques est réalisé en partant de la plaque la plus éloignée de la fibre neutre vers la plaque la plus proche. Ceci nous permet d'utiliser l'angle et la vitesse d'inclinaison du bord supérieur comme référence pour exprimer l'angle et la vitesse d'inclinaison du bord inférieur.



Pour réaliser cet assemblage, la plaque étudiée est transférée du repère global de description de la section vers le repère local dans lequel les équations ont été définies. Après avoir étudié leur comportement cinématique, les paramètres de continuité des bords sont transposés dans le repère global.

Il demeure nécessaire de déterminer la longueur d'onde cinématique ( $a$ ). L'hypothèse que la longueur d'onde ne varie pas entre le pré-effondrement et le post-effondrement a été retenue car elle permet d'assurer la continuité entre ces deux phases. La longueur d'onde cinématique correspond à la moyenne des longueurs d'ondes de flambement élastique des plaques comprimées.

Après avoir quantifié la consommation énergétique dissipée par l'ensemble de la rotule, l'équilibre entre les puissances externe et interne permet d'obtenir le moment instantané de post-effondrement :

$$\dot{W}_{total} = 2M_{comp}\dot{\theta} \Rightarrow M_{comp} = \frac{\dot{W}_{total}}{2\dot{\theta}} \quad (146)$$

### Gestion de la position de la fibre neutre

En flexion, la position de la fibre neutre est fixée de manière à équilibrer l'effort entre la partie comprimée et la partie tendue. Dans le domaine élastique, elle se situe au centre de gravité de la section et au cours de la plastification, elle évolue vers la position qui équilibre la surface tendue et la surface comprimée. L'apparition de déplacements transversaux, engendrés par l'instabilité des parois comprimées, réduit la capacité de la partie comprimée à supporter un effort. Nous observons alors le déplacement de la fibre neutre vers la partie tendue. Cette évolution s'accroît avec l'angle de pliage. La gestion de la position de la fibre neutre est effectuée par procédure itérative en annulant la somme totale des efforts  $\mathbf{P}_{total}$  dans la section à chaque incrément d'angle (Fig. 40) :

$$\mathbf{P}_{total} = \mathbf{P}_{cin} + \mathbf{P}_{elastoplas}^+ - \mathbf{P}_{elastoplas}^- \quad (147)$$

avec,  $\mathbf{P}_{cin} = \int_0^l \frac{M_0 f(\theta)}{y(l)} dl$  pour une ligne de pliage stationnaire,

et  $\mathbf{P}_{cin} = \int_0^l \frac{M_0 V_t}{y(l)\dot{\theta}r} dl$  pour une ligne de pliage mobile.

$\mathbf{P}_{elastoplas}^+$  et  $\mathbf{P}_{elastoplas}^-$  sont respectivement les efforts élasto-plastiques de la zone comprimée et de la zone tendue obtenus par intégration du champ de contraintes en considérant une répartition linéaire des déformations.

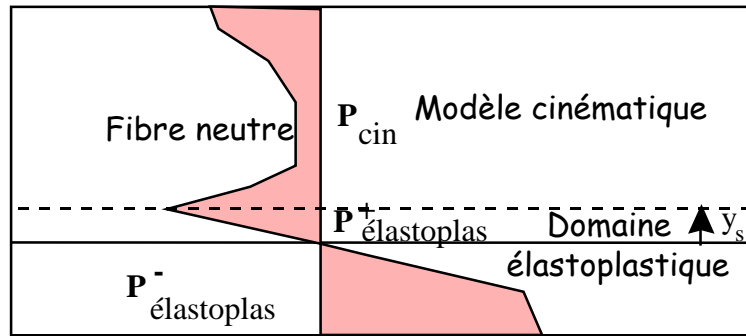


Figure 40. Evolution de la contrainte après effondrement.

## 4. Synthèse

La nécessité d'alimenter les ressorts non-linéaires d'un modèle simplifié, de type multicorps, par des réponses Effort/Ecrasement et Moment/Angle de pliage et ce, sans lui faire perdre tout l'intérêt d'une démarche rapide dédiée à la phase d'avant-projet, justifie l'intérêt porté aux modèles analytiques en compression et en flexion.

La première partie a concerné les modèles analytiques en compression. Les développements présentés pour la caractérisation des phases de pré-effondrement et d'effondrement, permettent de traiter tout type de structure prismatique à parois minces, de section mono- ou multitubulaire, à épaisseur simple ou multiples, sous chargement quasi-statique ou dynamique et en tenant compte de la présence d'une imperfection initiale qui n'est pas limitée aux petites déformations. Pour ce qui est de la phase de post-effondrement, le modèle mixte généralisé développé par Wierzbicki et Abramowicz a été présentée, ainsi qu'une extension de ce modèle pour traiter le cas des structures à épaisseurs multiples. Introduisant le concept d'éléments coin à faces communes, ce nouveau modèle généralisé permet de caractériser le comportement des profilés multitubulaires extrudés ou soudés en continu.

La seconde partie a concerné les modèles analytiques en flexion pure. La caractérisation des phases de pré-effondrement et d'effondrement est articulée sur une méthode originale postulant la continuité entre le mode de voilement dans la phase précédant l'effondrement et le faciès de post-effondrement. La section, soumise à un chargement de flexion, est décomposée en un ensemble de plaques reliées par leurs conditions aux limites. Les contraintes de compression étant à l'origine du voilement des plaques, une étude aux valeurs propres dans le domaine élastoplastique permet d'obtenir le mode de voilement ainsi que le chargement ultime que peut supporter la section. A partir du mode de voilement, un mode cinématique d'effondrement est obtenu pour l'ensemble de la section. Celle-ci est décomposée en un ensemble de plaques, dont le comportement cinématique dépend du comportement des coins supérieur et inférieur de chaque plaque. Pour une plaque donnée, nous recherchons dans la bibliothèque de modèles cinématiques basiques développés, qui sont représentatifs de la plupart des faciès d'effondrement existants, l'un des cinq modèles correspondant au comportement de cette plaque. Lorsque toutes les plaques ont été décrites par un modèle cinématique, un assemblage global de la section est effectué. Par application du théorème des puissances virtuelles, la réponse Moment-Angle de pliage de post-effondrement est obtenue et à chaque pas d'angle de calcul, la position de la fibre neutre est gérée par équilibre des efforts dans les zones comprimées et tendues.

L'ensemble de ces développements est implémenté dans le module SEP-CRASH du progiciel multicorps rigides MB-CRASH [UVHC 03]. Ce module est dédié à la caractérisation des réponses d'effondrement en compression axiale et en flexion pure, pour les approches globales de modélisation, ainsi que pour le dimensionnement rapide des profilés à parois minces de sections prismatiques arbitraires.

## Références Bibliographiques

- [ABR 84] Abramowicz W., Jones N., Dynamic axial crushing of square tubes, *Int. J. Impact Engng.* 2, 179-208 (1984).
- [ABR 86] ABRAMOWICZ W., JONES N., Dynamic progressive buckling of circular and square tubes, *Int. J. Impact Engng.* 4, 243-270 (1986).
- [ABR 89] ABRAMOWICZ W., WIERZBICKI T., Axial crushing of multicorner sheet metal columns, *J. Appl. Mech.* 56, 113-120 (1989).
- [ALB 92] ALBERTINI C., DELGRANDE A., DELZANO C., KIEFER R., A new approach to crashworthiness studies on thin Sheet Metal Structures Using the Large Hopkinson's Bar Method, Technical Note N°I.92.133, Joint Research Centre, ISPRA (1992).
- [ANC 94] ANCEAU J.H., Modèles cinématiques en flexion: contribution au développement d'une méthodologie simplifiée de détermination des courbes caractéristiques du comportement bidimensionnel, PhD Thesis, University of Valenciennes, France (1994).
- [BEL 77] BELYTSCHKO, T., SCHWER, L., KLEIN, M.J., Analysis of Space Frames, *International Journal for Numerical methods in Engineering* 11, 65-84 (1977).
- [CRA 95] CRASH-CAD<sup>R</sup>, WIERZBICKI T., ABRAMOWICZ W., A computer program for design of columns for optimum crash, (1995).
- [DRA 93] DRAZETIC P., MARKIEWICZ E., RAVALARD Y., Application of kinematic models to compression and bending in simplified crash calculations, *Int. J. Mech. Sci.* 35, N° 3/4, 179-191 (1993).
- [DRA 95] DRAZETIC P., MARKIEWICZ E., LEVEL P., RAVALARD Y., Application of the generalized mixing kinematic model to the calculation of crushing response for complex prismatic sections, *Int. J. Impact Engng.* 16, N° 2, 217-235 (1995).
- [DRA 99] P. DRAZETIC, F. PAYEN, P. DUCROCQ, E. MARKIEWICZ, Calculation of the deep bending collapse response for complex thin-walled columns — I. Pre-collapse and collapse phases, *Int. J. Thin-Walled Structures*, Vol. 33, N° 3 (1999).
- [DUT 76] DUTHEIL J., VALBERT G., Le voilement des plaques dans la période post-critique, *Construction Métallique* 1, 5-39 (1976).
- [FAY 90] FAY P. A. & SUTHURST G. D, Redesign of Adhesively Bonded Box Beam Sections for Improved Impact Performance, *International Journal of Adhesion and Adhesives* 10, N° 3, 128-138 (1990).
- [HIL 86] HILL, R., Extremal paths of plastic work and deformation, *Journal Mechanics and Physics of Solids* 39, N°5, 523-551 (1986).
- [KEC 79] KECMAN D., Bending collapse of rectangular section tubes in relation to the bus roll over problem, PhD Thesis, Cranfield Institute of Technology, U.K (1979).
- [KEC 83a] KECMAN D., Analysis of framework-type safety structures in road vehicles, *Structural Crashworthiness*, 371-396, N. Jones & T. Wierzbicki, Butterworths and Co., London (1983).
- [KEC 83b] KECMAN D., Bending collapse of rectangular and square section tubes, *Int. J. Mech. Sci.* 25, 623-636 (1983).
- [KEI 92] KEISLER C., Etude de la résistance à l'impact d'assemblages collés. Influence des états de surface, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I (1992).
- [KEI 93] KEISLER C, LATAILLADE J. L., Assemblage collé de tôles d'acier: Etude expérimentale du comportement sous sollicitation en pelage, *Matériaux & Techniques*, N° 12 (1993).
- [LI 90] LI S., REID S. R., relationship between the elastic buckling of square tubes and rectangular plates, *Trans. ASME* 57, 969-973 (1990).
- [MAH 86] MAHENDRAN M., Elastic buckling of ideal thin-walled structures under combined loading using a finite strip method, *Thin-Walled Structures* 4, 329-362 (1986).
- [MAR 94a] MARKIEWICZ E., Contribution au développement d'une méthodologie simplifiée d'aide au design collision des véhicules de transport pendant la phase de préconception: introduction du concept de super éléments de pliage, PhD Thesis, University of Valenciennes, France (1994).

- [MAR 94b] MARKIEWICZ E., DRAZETIC P., MILCENT G., RAVALARD Y., Crash behaviour of railway vehicles - hybrid approach, *PAM'94 - PAM Users Congress*, Paris (1994).
- [MAR 96a] MARKIEWICZ E., DUCROCQ P., DRAZETIC P., RAVALARD Y., Application of the kinematic models to the calculation of the dynamic crushing response of complex prismatic sections, *Int. Journal of Crashworthiness* **1**, N° 2 (1996).
- [MAR 96b] MARKIEWICZ E., CORNETTE D., PAYEN F., DRAZETIC P., Simplified Vehicle Crash Simulation - Part. II : Tools for Multibody Modelling and Application to an impacted double curvature "S" Beam, *NATO Advanced Study Institute, Crashworthiness of Transportation Systems : Structural Impact and Occupant Protection*, Troia, Portugal, July 7-19 (1996).
- [MAR 99] E. MARKIEWICZ, F. PAYEN, D. CORNETTE, P. DRAZETIC, Calculation of the deep bending collapse response for complex thin-walled columns — II. Post-collapse phase, *Int. J. Thin-Walled Structures* **33**, N° 3 (1999).
- [NIS 92] NISHINO M., YONENO M., KISHIMOTO Y., MURATA A., Axial Impact Testing of Weldbonded Box Sections, *JSAE Review* **13**, N°4, 64-70 (1992).
- [PAM 95] PAM-SFE/SBE™, *User's manual*, Pam System International S.A., Version 1995.
- [PAM 96] PAM-OPT™, *User's manual*, Pam System International S.A., Version 1996.
- [PAM 98] PAM-CRASH™, *User's manual*, Pam System International S.A., Version 1998.
- [ORE 91a] ORE, Description Technique de la Conception des Véhicules, Question ORE B165, Rapport No. 8, Utrecht (1991).
- [ORE 91b] ORE, Essais de collision grandeur nature - Description du site et des méthodes d'essais, Question ORE B165, Rapport No. 9, Utrecht (1991).
- [ORE 91c] ORE, Résultats d'essais d'impact et comparaison avec les prévisions, Question ORE B165, Rapport No. 10, Utrecht (1991).
- [PAY 96] PAYEN F., Contribution au développement d'un modèle analytique généralisé de caractérisation du comportement en flexion des profilés à parois minces, PhD Thesis, University of Valenciennes, France (1996).
- [STO 48] STOWELL E. Z., A unified theory of plastic buckling of columns and plates, NACA, TR898 (1948).
- [SAT 96] SATO A., NAKAJIMA H., NAKAMURA S., TOMIOKA Y., Weight reduction technology by laser irradiation for body panels, *JSAE review* **17**, 179-183 (1996).
- [TWI 85] RIVET, Drop weight impact testing of spot welded, weld-bonded and adhesively bonded box sections, TWI Report 9431.01/85/478.3 (1985).
- [TWI 91] WESTGATE S. A., MUGGRIDGE G., Drop weight testing of box sections assembled using spot welded, clinched and rivetted joints plus adhesives", TWI Report 29246/1/91 (1991).
- [WHI 92] WHITE M. D., Collapse performance of thin walled box beam structures under axial impact loading, Ph. D. Thesis, Liverpool University, DX 183811 (1992).
- [WIE 83] WIERZBICKI T., ABRAMOWICZ W., On the crushing mechanics of thin-walled structures, *Journal of Applied Mechanics*, **50**, 727-734 (1983).
- [WIE 89a] WIERZBICKI T., ABRAMOWICZ W., The mechanics of deep plastic collapse of thin-walled structures, *Structural Failure*, T. Wierzbicki and N. Jones, eds., John Wiley and Sons, New York (1989).
- [WIE 89b] WIERZBICKI T., RECKE L., Ultimate strength of box columns subjected to impact loading, Int. Conf. Mech. Prop. Materials at High Rates of Strain, Oxford (1989).
- [WIE 94a] WIERZBICKI T., RECKE L., ABRAMOWICZ W., GHOLAMI T., HUANG J., Stress profiles in thin-walled prismatic columns subjected to crush loading - Part 1 : Compression, *Computers and Structures* **51**, N°6, 611-623 (1994).
- [WIE 94b] WIERZBICKI T., RECKE L., ABRAMOWICZ W., GHOLAMI T., HUANG J., Stress profiles in thin-walled prismatic columns subjected to crush loading - Part 2 : Bending, *Computers and Structures* **51**, N°6, 625-641 (1994).