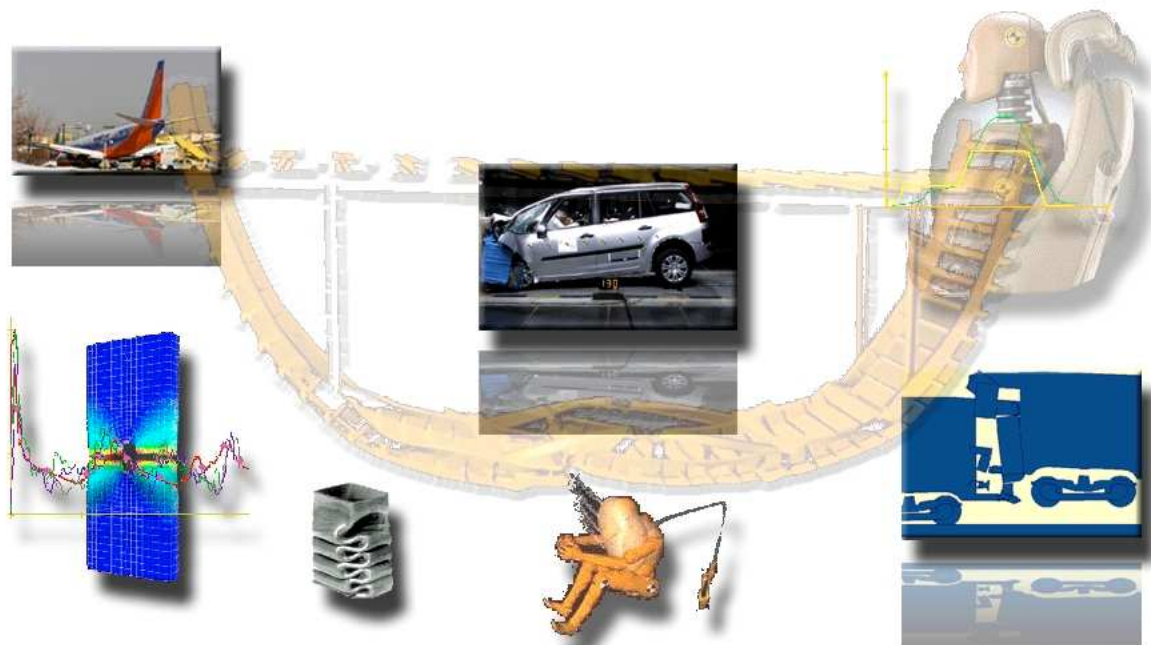


L'Ingénierie du Crash

Dans les VEHICULES de TRANSPORT



Complément pdf
**LOCALISATION AUTOMATIQUE DES ZONES SUBISSANT DE
 GRANDES DEFORMATIONS PLASTIQUES**

Eric Markiewicz - V1.01 – 12 Juillet 2007

Auteurs **Prof. Eric Markiewicz** **Dr Eric Weyenbergh** **Prof. Yves Ravalard** **Dr Bertrand Langrand**
 Co- **Prof. Daniel Coutellier** **Prof. Pascal Drazétic** **Dr. Eric Deletombe**
 Auteurs

1. Introduction

Nous avons vu que la modélisation multicorps nous permet de prendre en compte les zones de grandes déformations plastiques par l'utilisation de joints de déformation qui sont la superposition de liaisons cinématiques avec des ressorts non-linéaires de translation ou de rotation. Nous venons de voir que les modèles analytiques sont des outils performants quant à la détermination des caractéristiques de ces ressorts. Si les non-linéarités matérielles sont prises en compte par le biais des modèles cinématiques, il reste cependant à prendre en compte les non-linéarités géométriques de la structure à modéliser. Et il se pose alors le problème de la détermination du nombre et de la position des joints de déformation dans le modèle multicorps. Ces joints sont de deux types différents :

- joint de déformation en compression,
- joint de déformation en flexion.

Les grandes déformations plastiques sont modélisées par des ressorts et amortisseurs non-linéaires. Une déformation dont le comportement global est axial est modélisée par l'association d'un joint de translation avec un ressort rectiligne (Fig. 1) alors qu'une déformation dont le comportement global est bidimensionnel ou tridimensionnel est modélisée par des joints de révolution associés à des ressorts de rotation (Fig. 2).

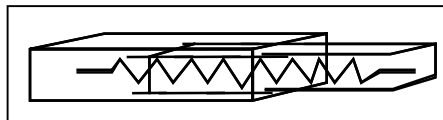


Figure 1. Joint de déformation en compression.

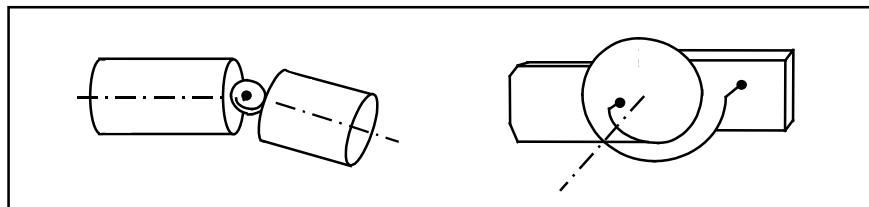


Figure 2. Joints de déformation en flexion.

La localisation automatique des zones de grandes déformations est un outil indispensable à la construction d'un modèle multicorps pour la modélisation du choc structural. Le modèle doit reproduire une cinématique de déformation de la structure représentative de la réalité. La méthode de localisation doit permettre d'optimiser le nombre de joints de déformation et éviter d'accroître les temps de modélisation et de calcul par une augmentation du nombre de degrés de liberté induits par une surabondance de ressorts non-linéaires.

Nous avons décidé d'utiliser un modèle éléments finis poutre élasto-plastique dédié aux profilés à parois minces pour la localisation des zones de grandes déformations plastiques [COR 97a], [COR 97b], [MAR 99].

Dans le cas de structures complexes, le type de sollicitation est arbitraire et combine la compression, la flexion et éventuellement la torsion sous chargement dynamique. La phase de post-effondrement est assumée en compression axiale ou en flexion pure quel que soit le mode de chargement. Seules les phases de pré-effondrement sont affectées par le type de

chargement. Or, dans le cas des modèles analytiques, celles-ci sont limitées à des chargements primaires (axial pour la compression, de type cantilever ou quatre points pour la flexion). En outre, dans le cas de la flexion, la sensibilité du matériau à la vitesse de déformation et les effets d'inertie dynamique latérale des plaques ne sont pas pris en compte.

Le modèle poutre éléments finis utilisé pour la localisation règle les limitations des modèles analytiques en décrivant une phase de pré-effondrement plus réaliste. Ce modèle poutre permet en plus de déterminer, dans le cas de la flexion, l'orientation du plan de flexion indispensable au calcul du post-effondrement avec le modèle analytique en flexion.

Un autre avantage du recours aux éléments de poutre élasto-plastique, comparé à une approche classique de type multicorps rigides, réside dans la meilleure représentation de la flexibilité de la structure tout en minimisant le nombre de degrés de liberté requis. En effet, certains composants structuraux peuvent présenter des déformations élasto-plastiques sans que le seuil critique d'effondrement, nécessitant l'introduction d'un ressort non-linéaire, ait été atteint.

2. Modèles éléments finis poutres élasto-plastiques à parois minces sous chargement dynamique

2.1 Présentation de l'élément poutre

Les modèles poutres implémentés dans le code de calcul PAM-CRASHTM [PAM 98] sont basés sur la formulation de Belytschko-Schwer [BEL 77] et sur la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. La particularité de cet élément poutre est d'être efficace dans le cas des grands déplacements et grandes rotations. La technique de co-rotation, introduite pour l'élément poutre par Belytschko et Schwer, décompose le champ de déplacement en un champ de déformation et un champ de déplacement de corps rigide en utilisant deux systèmes de coordonnées (Fig. 3). Le premier système de coordonnées est le système nodal, il est fixé à chaque noeud et solidaire de son mouvement. Le second système, qui se déforme avec l'élément, est appelé le système élémentaire. Les déformations sont déterminées en comparant les orientations du système élémentaire à un système de référence, après avoir soustrait les déplacements de corps rigides à l'aide du système nodal.

Ce modèle poutre élasto-plastique général (référéncé type 213 dans la bibliothèque PAM-CRASHTM) a été développé pour des sections à parois minces de géométries arbitraires. L'utilisateur a, dans ce cas, la possibilité de particulariser sa section en la décomposant par des points d'intégration pondérés pour une meilleure évaluation des moments de flexion et des termes de couplage compression/flexion dans le domaine plastique. La section transversale de la poutre est décomposée en un nombre de secteurs (Fig. 4). Pour chacun des secteurs, un point d'intégration $P_i(\hat{y}_i, \hat{z}_i)$ est défini avec A_i l'aire de ce secteur.

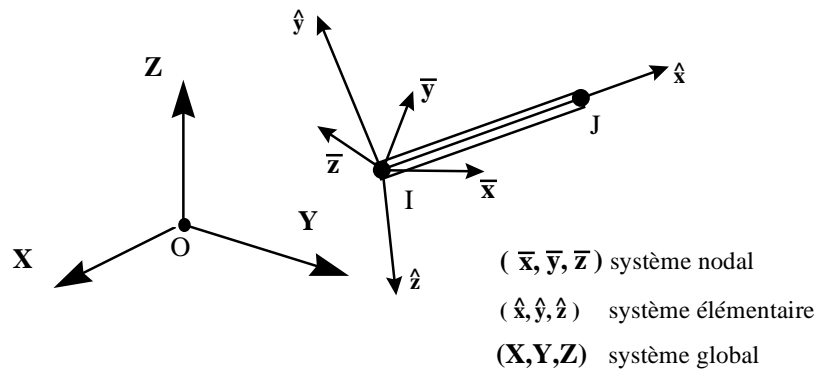


Figure 3. Représentation des différents repères associés à l'élément poutre.

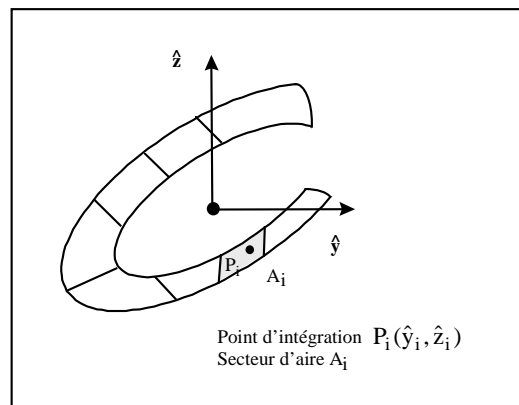


Figure 4. Décomposition de la section en secteurs.

Les caractéristiques élasto-plastiques du matériau sont prises en compte par la courbe de comportement contrainte-déformation, approximée par segments ou définie à l'aide d'un modèle élasto-plastique. Les effets de vitesse de déformation sur le comportement du matériau peuvent être pris en compte à l'aide d'une correction dynamique. Différents modèles constitutifs sont disponibles: Cowper-Symonds, Johnson-Cook, Jones modifié, etc. Le choix d'un modèle, qui est fonction des paramètres intrinsèques du matériau, est fonction de la disponibilité de ces paramètres.

Nous avons testé cet élément poutre pour des cas de compression et de flexion pure. D'une manière générale, nous nous sommes aperçus que cet élément décrit correctement la phase de pré-effondrement d'un profilé à parois minces sous un chargement de flexion ou de compression (Fig. 5). L'utilisation de cet élément peut donc nous permettre de relever tous les seuils d'effondrement dans les différentes parties de la structure que ce soit en flexion ou en compression. La phase de post-effondrement n'étant pas correctement décrite par ces éléments poutres, celle-ci est prise en compte dans le modèle multicorps à l'aide des caractéristiques obtenues par le biais des modèles analytiques en flexion et en compression. En effet, les modèles poutres ne peuvent reproduire les modes d'effondrement locaux des composants, une approche par des modèles plaques comme celle employée dans les modèles cinématiques est donc plus judicieuse. Si le modèle analytique décrit mieux la phase de post-effondrement (Fig. 5), la courbe de pré-effondrement en flexion du modèle poutre est donnée pour des conditions réelles de chargement, combinant compression et flexion, prend en compte les effets d'inertie dynamique et de vitesse de déformation, et utilise les bras de levier réels mis en jeu pour calculer le moment.

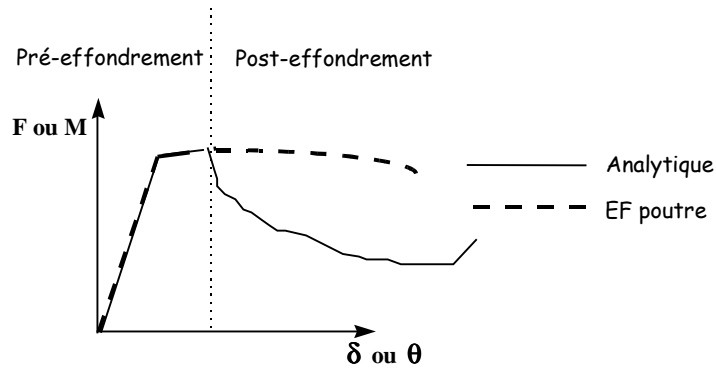


Figure 5. Comparaison des courbes de réponse Effort / Déplacement ou Moment / Angle entre un élément poutre élasto-plastique et le modèle analytique en compression axiale ou en flexion pure.

L'utilisation de ces éléments poutres nous permet, dans la modélisation multicorps, de positionner les zones subissant des déformations en compression, en flexion (rotules plastiques) et nous informe sur l'orientation du plan de flexion de chacune des rotules. Ce plan de flexion est en effet indispensable au calcul des caractéristiques d'effondrement par le modèle cinématique en flexion (orientation de la section).

2.2 Positionnement des points d'intégration de la section

La section d'une structure à parois minces peut être décrite par un ensemble de points reliés entre eux par des segments ayant chacun une épaisseur de tôle. Cette description géométrique est d'ailleurs utilisée par les modèles analytiques en compression et en flexion. Le modèle poutre 213 implémenté dans le code de calcul PAM-CRASH™ nécessite pour l'emploi de sections transverses complexes, d'introduire des points d'intégration. Cependant, aucune règle de position n'est définie pour ces points dans le cas de sections à parois minces quelconques. Nous avons opté pour deux points d'intégration par segment de description de la section. Il faut cependant s'assurer qu'il n'y ait pas une trop grande disparité entre les longueurs des différents segments, le cas échéant, ceux-ci doivent être découpés afin d'obtenir une longueur homogène pour la section. Chaque segment de la section est donc décrit par deux points d'intégration dont la position est calculée de la manière suivante.

Soit un segment d'extrémités A et B de longueur b et d'épaisseur e dont la position du centre G_1 est donnée par rapport au centre de gravité G de la section (Fig. 6).

Les points d'intégration p_1 et p_2 sont définis de telle sorte que les composantes d'inertie du segment au centre de gravité dans le repère principal d'inertie (Gxy) soient :

$$I_{xx} = eb/2(Yp_1^2 + Yp_2^2) \quad (1)$$

$$I_{yy} = eb/2(Xp_1^2 + Xp_2^2) \quad (2)$$

Nous définissons deux autres repères : $(G_1x_1y_1)$ correspond au repère principal de l'élément plaque (segment AB) au centre de la plaque G_1 et $(G_1x'y')$ correspond au repère principal de la section translaté au centre de la plaque. α est l'angle de rotation pour passer du repère $(G_1x_1y_1)$ au repère $(G_1x'y')$.

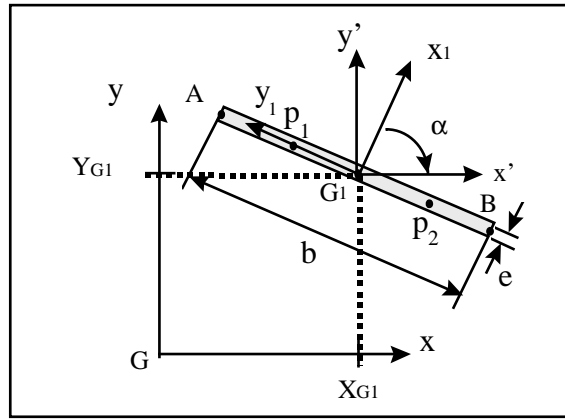


Figure 6. Segment de section décrit par 2 points d'intégration.

Or, les composantes d'inertie du segment AB s'écrivent :

dans le repère $(G_1x_1y_1)$	dans le repère $(G_1x'y')$	dans le repère (Gxy)
$I_{x_1x_1} = eb^3/12$	$I_{x'x'} = I_{x_1x_1} \cos^2 \alpha + I_{y_1y_1} \sin^2 \alpha$	$I_{xx} = I_{x'x'} + eb y_{G_1}^2$
$I_{y_1y_1} = be^3/12$	$I_{y'y'} = I_{x_1x_1} \sin^2 \alpha + I_{y_1y_1} \cos^2 \alpha$	$I_{yy} = I_{y'y'} + eb x_{G_1}^2$
	$I_{x'y'} = (I_{x_1x_1} - I_{y_1y_1}) \cos \alpha \sin \alpha$	$I_{xy} = I_{x'y'} + eb x_{G_1} y_{G_1}$

Les coordonnées des points d'intégration p_1 et p_2 sont donc définies par :

$$xp_1 = x_{G_1} - (I_{yy}/eb - x_{G_1}^2)^{1/2} \quad xp_2 = x_{G_1} + (I_{yy}/eb - x_{G_1}^2)^{1/2} \quad (3)$$

$$yp_1 = y_{G_1} - (I_{xx}/eb - y_{G_1}^2)^{1/2} \quad yp_2 = y_{G_1} + (I_{xx}/eb - y_{G_1}^2)^{1/2} \quad (4)$$

A chaque point d'intégration p_i est affecté le coefficient de pondération $w_i=1/2$ ($b_i \cdot e_i$), où, b_i et e_i sont respectivement la longueur et l'épaisseur du segment correspondant.

Les inerties de la section peuvent donc s'écrire :

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^n w_i y_{pi}^2 \quad I_{yy} = \sum_{i=1}^n w_i x_{pi}^2 \quad (5)$$

3. Algorithme de localisation des zones de grandes déformations plastiques

L'algorithme représenté Figure 7 définit une stratégie de localisation des zones de grandes déformations plastiques et d'obtention des caractéristiques pour les joints de déformation du modèle multicorps. Celle-ci est basée sur la comparaison entre les modèles éléments finis poutres et les modèles analytiques présentés précédemment. L'algorithme est décomposé en 9 étapes (**0** à **8**) qui s'insèrent dans un schéma itératif sur la durée de simulation numérique. Nous passons en revue les différentes étapes de cette démarche :

*Etape **0**: Une modélisation éléments finis poutres de la structure est effectuée dans les conditions réelles de chargement (vitesse initiale, murs d'impact, masses additionnelles ...)

*Etape **1**: Les modèles analytiques en compression axiale et en flexion pure déterminent, pour chaque type de section transversale de la structure,

l'effort ultime de compression \mathbf{Pxa} et les moments ultimes de flexion \mathbf{Mya} et \mathbf{Mza} pour les deux directions principales d'inertie.

*Etape 2: A chaque pas de calcul, dans chacun des éléments poutres de la structure, l'effort maximum de compression \mathbf{Pxef} et les moments maxima de flexion \mathbf{Myef} et \mathbf{Mzef} pour les deux directions principales d'inertie sont relevés.

*Etape 3: La norme \mathbf{Mef} est calculée :

$$\mathbf{Mef} = \sqrt{\mathbf{Myef}^2 + \mathbf{Mzef}^2}$$

Celle-ci correspond au moment de flexion de la poutre dans un plan incliné d'un angle Φ par rapport au plan (xOy).

*Etape 4: Détermination de l'orientation du plan de flexion par :

$$\Phi = \arctan\left(\frac{\mathbf{Mzef}}{\mathbf{Myef}}\right)$$

*Etape 5: Par interpolation elliptique, selon Φ l'orientation du plan de flexion obtenue, une prédiction du moment ultime analytique \mathbf{Ma} est effectuée, à partir de la connaissance des moments ultimes dans les deux directions principales d'inertie :

$$\mathbf{Ma} = \sqrt{(\mathbf{Mya} \cos(\Phi))^2 + (\mathbf{Mza} \sin(\Phi))^2}$$

*Etape 6: Définition des critères de localisation des zones de déformation en compression axiale et en flexion pure à l'aide des seuils de plastification \mathbf{Pxa} et \mathbf{Ma} . Une certaine tolérance est donnée à ces seuils, nous estimons qu'ils sont atteints pour une valeur de 90% de celle de \mathbf{Pxa} ou \mathbf{Ma} . L'expérience nous a montré que ces modèles analytiques donnent des résultats corrects légèrement surestimés avec une marge d'erreur de l'ordre de 10%.

*Etape 7: Si les seuils de plastification sont dépassés par l'effort maximum de compression \mathbf{Pxef} ou le moment maximum de flexion \mathbf{Mef} , l'élément poutre considéré est alors remplacé par un joint de déformation équivalent en compression axiale et/ou en flexion pure. La caractéristique du ressort non-linéaire est obtenue par assemblage de la réponse en phase de pré-effondrement du modèle poutre éléments finis et de la réponse en phase de post-effondrement du modèle analytique en compression ou en flexion. Dans le cas d'une rotule plastique, il convient d'associer, au ressort non-linéaire, une caractéristique de post-effondrement calculée dans le plan de flexion Φ par le biais du modèle analytique en flexion.

Dans le cas où ces seuils ne sont pas dépassés (flèches SINON), un nouveau cycle du schéma itératif reprend avec l'étape 0.

*Etape 8: Nous aboutissons à un modèle multi-corps complet ou hybride (multi-corps/élément finis) de la structure. Cette étape constitue le nouveau modèle de l'étape 0 pour la suite du processus itératif jusqu'à l'instant t_f correspondant au temps final de l'étude.

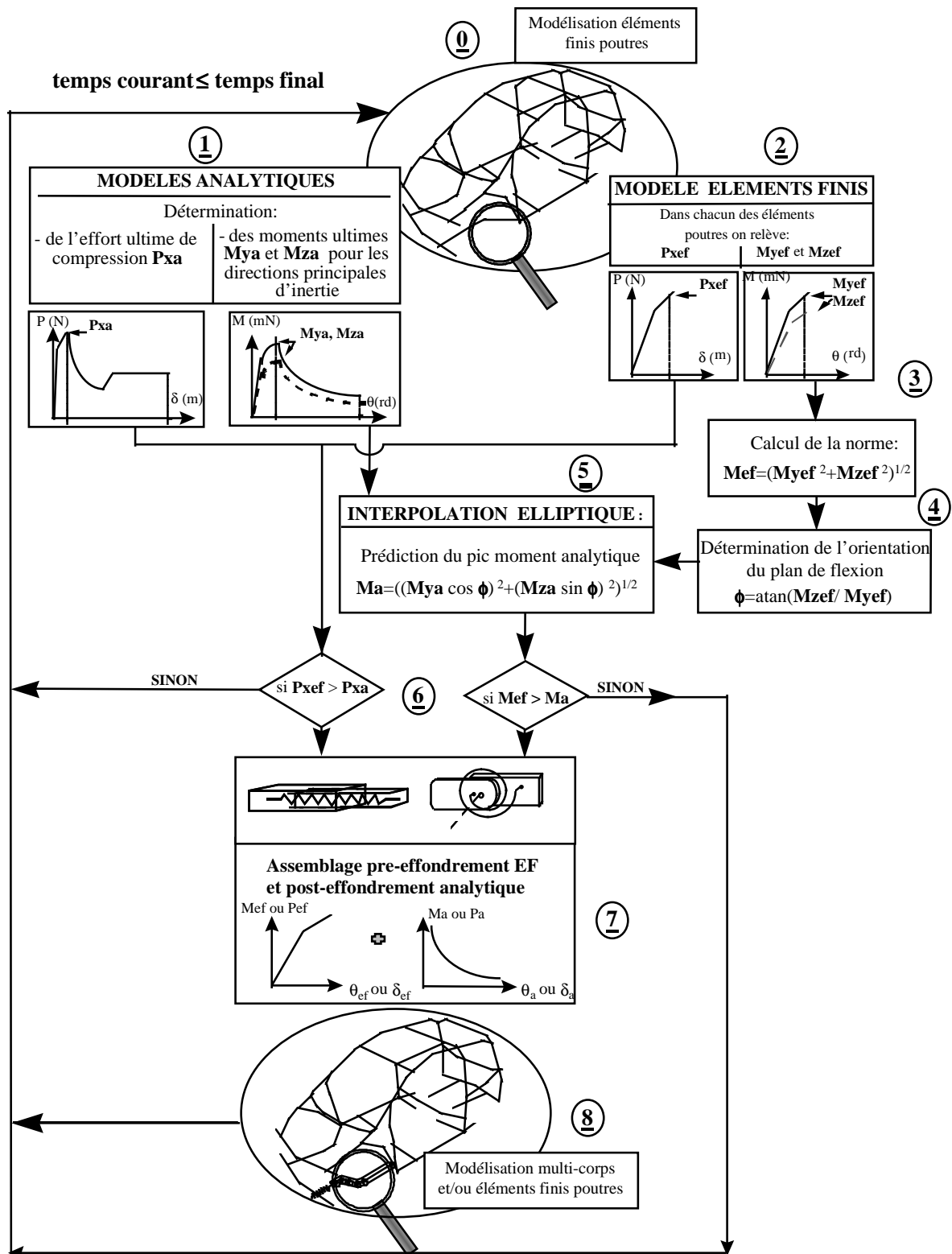


Figure 7. Algorithme de localisation des zones de grandes déformations plastiques.

Comparativement aux modèles multicorps rigides classiques, le recours à des poutres élasto-plastiques présente l'avantage d'être représentatif de la flexibilité de la structure, tout en minimisant le nombre de degrés de liberté et par conséquent, en minimisant les temps de modélisation et de calcul.

Nous pouvons résumer les évolutions du modèle de la structure pour un temps de

simulation donné :

A l'instant initial ($t = 0$), un modèle poutre de la structure est effectué dans les conditions réelles de chargement,

en cours de calcul ($0 \leq t \leq t_f$), nous modifions le modèle initial en un modèle hybride (éléments finis poutres /multi-corps),

au terme de l'étude ($t = t_f$) le modèle est soit hybride soit complètement multicorps si la majeure partie des composants de la structure ont plastifié.

Le schéma itératif proposé permet de prédire toute apparition de zones de déformation plastique en compression axiale ou en flexion pure en cours de calcul.

Il correspond tout à fait à une approche en phase de préconception car les temps de modélisation et de calculs restent très courts.

4. Application à l'étude du comportement au choc d'une cabine de conduite

L'application concerne le comportement au choc d'une cabine de conduite ferroviaire, qui a été construite et soumise à un test de collision par le comité B 165 de l'ERRI (European Rail Research Institute), afin d'évaluer sa résistance dynamique ainsi que les risques encourus par le conducteur lors d'un choc frontal.

De part sa conception, le comportement au choc de cette structure n'est caractérisé que par des rotules plastiques. L'absorption énergétique en compression axiale est assurée par des absorbeurs de choc en tubes composites et nids d'abeille dont les caractéristiques Effort/Ecrasement ont été obtenues de manière expérimentale.

Un modèle éléments finis d'une demi cabine de conduite a tout d'abord été développé (Fig. 8). Les différents éléments structuraux sont modélisés par 5813 éléments de coques et 48 éléments volumiques. Les absorbeurs d'énergie spécifiques, tels le tube composite GRP et les nids d'abeille sont modélisés par des éléments barres non-linéaires utilisant les caractéristiques Effort/Ecrasement issues de tests préliminaires réalisés par le comité B165 de l'ERRI.

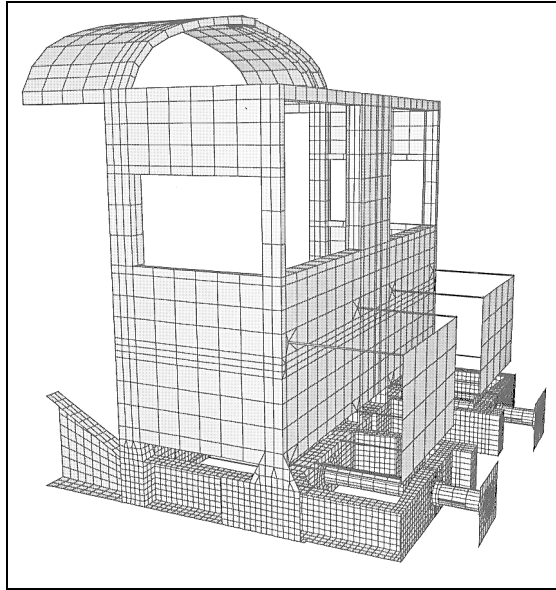


Figure 8. Modèle éléments finis de la cabine de conduite.

D'un point de vue expérimental, une cabine mobile se déplaçant à la vitesse de 16 ms^{-1} impacte une cabine identique à l'arrêt, freins non serrés. La collision étant symétrique, l'impact d'une demi-cabine à la vitesse de 8 ms^{-1} contre un mur rigide a été simulé. La durée d'étude est de 200 ms, correspondant à une conversion totale de l'énergie cinétique en énergie de déformation plastique et à l'initiation de la phase de déchargement. Ce modèle éléments finis a été préalablement validé par comparaison avec les résultats expérimentaux.

L'analyse du comportement au choc de cette structure montre que la plupart des déformations plastiques, en dehors des absorbeurs d'énergie, sont localisées sur le châssis. Afin de valider notre approche de localisation, seul le demi-châssis de la cabine validée a été conservé. Comme le montre la Figure 9.a, l'impact de cette structure modifiée (4788 éléments coques et 48 éléments volumiques) à la vitesse de 8 ms^{-1} contre un mur rigide a été simulé. Ce modèle est pris comme référence pour la validation de l'approche simplifiée.

Pour évaluer notre algorithme de localisation, ainsi que le nouvel élément de poutre élasto-plastique étendu à la phase de post-effondrement des profilés à parois minces, deux modèles simplifiés ont été examinés et comparés aux résultats du modèle coques de référence.

Le premier modèle simplifié est un modèle existant, de type multicorps rigide, évalué lors de travaux précédents [MAR 94a], [MAR 94b]. Ce modèle, référencé R-S (Rigid-Springs), est constitué de 17 corps rigides, 19 ressorts non-linéaires (rotules plastiques) et 6 barres non-linéaires (absorbeurs axiaux). Les courbes d'effondrement en flexion, utilisées pour alimenter les ressorts non-linéaires, ont été obtenues séparément à l'aide des modèles analytiques. Les rotules plastiques sont pré-localisées sur le modèle R-S au niveau des zones de déformation présentes (Fig. 9.b).

Sur la base du modèle R-S, l'algorithme de localisation est appliqué à un second modèle composé de 17 éléments de poutre étendue au post-effondrement et 6 éléments de barre non-linéaire. Ce second modèle est référencé EBE (Elastic-plastic Beam Element).

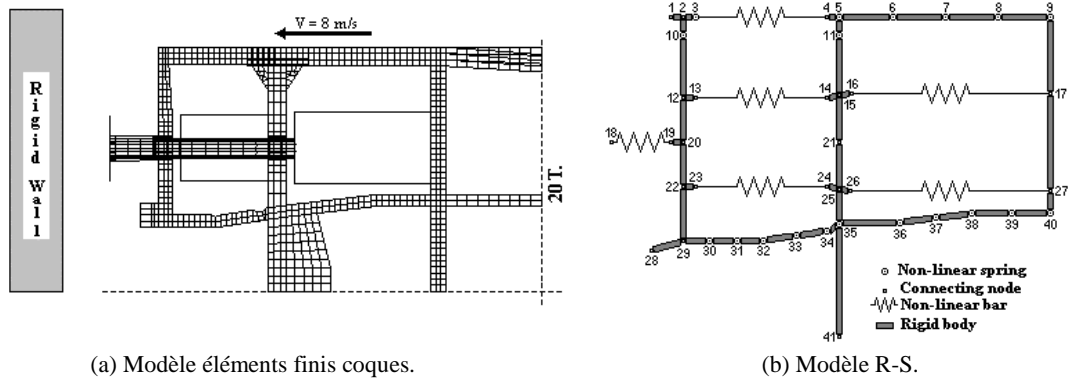


Figure 9. Modélisation en approches locale et globale du demi-châssis de la cabine de conduite.

Les résultats du modèle coque de référence et des modèles simplifiés R-S et EBE sont analysés qualitativement et quantitativement.

Dans un premier temps, les mécanismes de déformation sont comparés pour chaque approche à différents temps de l'étude. La Figure 10 montre que les déformées du modèle EBE sont en accord avec l'approche locale. Les déformées du modèle R-S sont similaires. En effet, pour ce type d'application 2D, avec des mécanismes d'effondrement simples et pré-localisés de part la conception, les résultats d'un modèle multicorps rigides avec pré-positionnement des rotules plastiques sont nécessairement corrects.

Quantitativement, les réponses en effort sur le mur d'impact en fonction du déplacement de l'extrémité arrière sont comparées pour chaque approche (Fig. 11)

Le manque évident de flexibilité du modèle R-S engendre un phénomène de verrouillage cinématique qui génère un pic important et des oscillations pour un déplacement δ d'environ 0.7 m (début d'effondrement des longerons arrière).

Le modèle EBE, associé à la méthode automatique de localisation, fournit une réponse de bien meilleure qualité. Cette amélioration est attribuée à différentes raisons :

- un gain important en terme de flexibilité structurale lié à l'emploi d'éléments de poutre élasto-plastique,
- la phase de pré-effondrement de chaque élément déformé est obtenue pour des conditions réelles de chargement mixant la compression et la flexion élasto-plastique,
- la localisation des mécanismes d'effondrement est chronologique. Le processus étant itératif, l'influence d'un mécanisme de déformation sur l'initiation d'un autre mécanisme est prise en compte intrinsèquement. A l'inverse de l'approche classique multicorps rigides, les mécanismes ne sont pas pré-localisés sur la configuration non déformée.

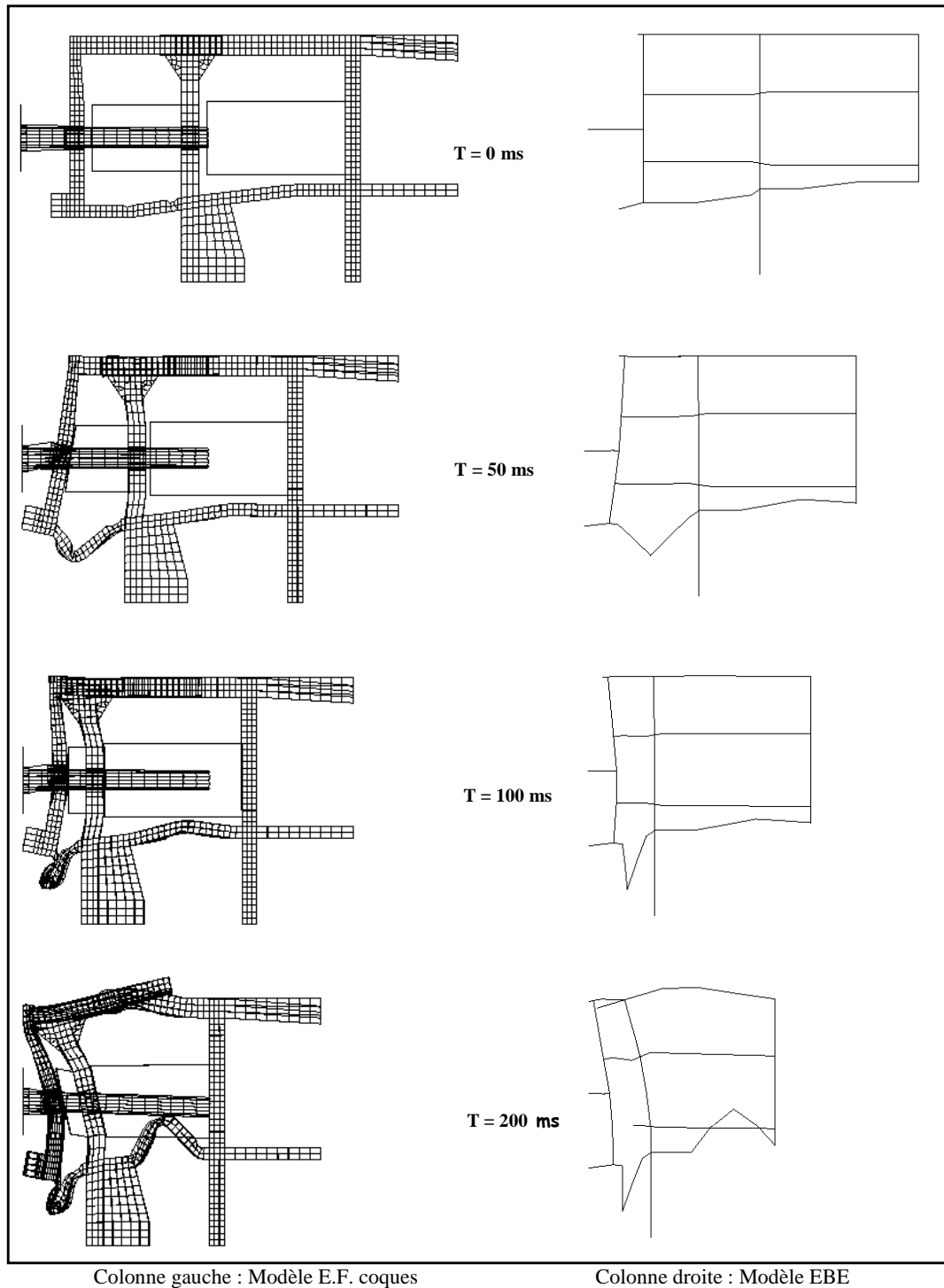


Figure 10. Comparaison des mécanismes de déformation.

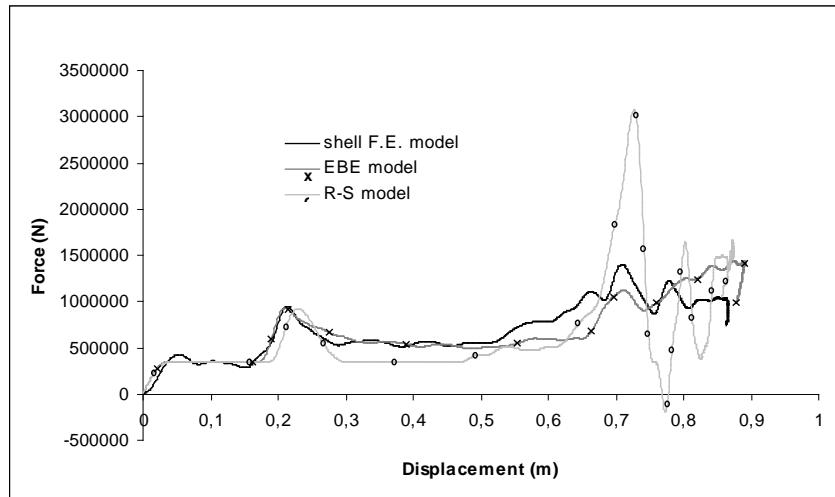


Figure 11. Comparaison des réponses Effort/Déplacement.

5. Synthèse

La méthode de localisation des grandes déformations plastiques permet d'estimer rapidement le comportement global d'une structure. Il faut une dizaine d'heures CPU pour résoudre le modèle coques E.F. du demi-châssis de la cabine de conduite, contre une vingtaine de minutes CPU pour l'algorithme de localisation. Les gains de temps sont très importants également en ce qui concerne la modélisation. Il faut plusieurs jours pour réaliser le modèle éléments finis coques de la structure, alors qu'il suffit de quelques heures pour réaliser le modèle éléments finis poutres et évaluer plusieurs designs alternatifs.

Comparativement à l'approche classique multicorps rigides, l'algorithme de localisation associé à des éléments finis poutres ne consomme que très peu de temps CPU supplémentaire. Par contre, la phase de modélisation est beaucoup plus aisée et rapide.

Cette méthode permet de placer et d'orienter correctement les zones de grandes déformations plastiques, sans augmenter inutilement le nombre de degrés de liberté. Ceci est particulièrement important dans le cas de structures complexes engendrant des mécanismes de déformation 3D. L'orientation du plan de flexion des rotules plastiques est obtenue par le modèle poutre lorsque le seuil d'effondrement est atteint et la caractéristique de post-effondrement est calculée par le modèle analytique dans ce plan de flexion.

Cette méthode permet également de prendre en compte le comportement flexible de la structure grâce à l'utilisation d'éléments de poutres élasto-plastiques et le processus de localisation étant itératif, la chronologie d'initiation des mécanismes d'effondrement est respectée et leurs relations de dépendance sont intrinsèquement assurées.

Références Bibliographiques

- [BEL 77] BELYTSCHKO, T., SCHWER, L., KLEIN, M.J., Analysis of Space Frames, *International Journal for Numerical methods in Engineering* **11**, 65-84 (1977).
- [COR 97a] CORNETTE D., Contribution au développement d'une méthodologie de conception au choc des véhicules automobiles en phase d'avant-projet, PhD Thesis, University of Valenciennes, France (1997).
- [COR 97b] CORNETTE D., THIRION J.L., DRAZETIC P., MARKIEWICZ E., PAYEN F., Plastic Hinge Concept for Simplified Vehicle Crash Simulation, ISATA, Special Joint Session between Lightweight Materials and Vehicle and Occupant Safety, 97SAF019, Florence, Italy, June 15-19 (1997).
- [MAR 94a] MARKIEWICZ E., Contribution au développement d'une méthodologie simplifiée d'aide au design collision des véhicules de transport pendant la phase de préconception: introduction du concept de super éléments de pliage, PhD Thesis, University of Valenciennes, France (1994).
- [MAR 94b] MARKIEWICZ E., DRAZETIC P., MILCENT G., RAVALARD Y., Crash behaviour of railway vehicles - hybrid approach, *PAM'94 - PAM Users Congress*, Paris (1994).
- [MAR 99] E. MARKIEWICZ, F. PAYEN, D. CORNETTE, P. DRAZETIC, Calculation of the deep bending collapse response for complex thin-walled columns — II. Post-collapse phase, *Int. J. Thin-Walled Structures* **33**, N° 3 (1999).
- [PAM 98] PAM-CRASHTM, *User's manual*, Pam System International S.A., Version 1998.