

# Aide mémoire d'analyse de données

B. Rousselet et J.P. Labrousse \*

8 décembre 2005

---

\* *Laboratoire de Mathématiques, Parc Valrose, F 06108 Nice, Cédex 2, email : br@math.unice.fr*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Orientation</b>	<b>4</b>
1.1	Contenu . . . . .	4
1.2	Méthodologie ; classe WIMS . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Utilisation de scilab</b>	<b>5</b>
2.1	Mise en train . . . . .	5
2.1.1	Les constantes . . . . .	6
2.1.2	Fonctions usuelles . . . . .	6
2.1.3	L'utilisation de matrices est très souple. . . . .	6
2.2	Programmation . . . . .	6
2.2.1	Fonctions . . . . .	7
2.2.2	Boucles . . . . .	8
2.2.3	Conditions . . . . .	8
2.2.4	Lectures dans fichiers . . . . .	8
2.3	Les bibliothèques . . . . .	9
2.4	Statistiques et analyse de données . . . . .	9
2.5	Equations différentielles, optimisation . . . . .	9
2.6	Exemples pour l'analyse de données . . . . .	9
2.6.1	Résultat matrice . . . . .	9
2.6.2	Projections . . . . .	9
2.6.3	Fonction pour Projections sur un plan et barycentre . . . . .	10
2.6.4	Fonction pour Projections et inertie sur un plan et barycentre . . . . .	11
2.6.5	Dessins de points . . . . .	12
2.6.6	Fonctions pour l'analyse en composantes principales . . . . .	12
2.6.7	Fonctions pour l'AFC . . . . .	15
2.6.8	Un exemple d'AFC . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Logiciel gnuplot</b>	<b>20</b>
<b>4</b>	<b>Equations, intersections, projections</b>	<b>21</b>
4.1	Introduction . . . . .	21
4.1.1	Références à utiliser . . . . .	21
4.1.2	Guide d'activité . . . . .	21
4.1.3	Méthodologie ; classe WIMS . . . . .	23
4.2	Droite du plan . . . . .	23
4.3	Plan et droite dans l'espace tridimensionnel . . . . .	27
4.3.1	Plan dans l'espace . . . . .	27
4.3.2	Droite dans l'espace . . . . .	27
4.3.3	Projection sur un plan . . . . .	30
4.3.4	Projection sur une droite . . . . .	31
4.4	Droite et plan dans un espace de grande dimension . . . . .	31
4.4.1	Vecteurs et matrices . . . . .	31
4.4.2	Plan dans un espace de dimension $N > 3$ . . . . .	31

4.4.3	Droite dans un espace de dimension $N > 3$ . . . . .	32
4.4.4	Passage d'équation cartésienne à paramétrique et réciproquement . . . . .	32
4.4.5	Projections orthogonales . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Notations d'algèbre linéaire</b>	<b>35</b>
<b>6</b>	<b>Inertie d'un système</b>	<b>37</b>
6.1	Définition, propriétés . . . . .	37
6.2	Maximum, minimum de l'inertie . . . . .	39
<b>7</b>	<b>Analyse en composantes principales (A.C.P.)</b>	<b>41</b>
7.1	Introduction . . . . .	41
7.2	Pratique de l'ACP . . . . .	41
7.3	Interprétation de l'ACP . . . . .	42
7.3.1	Qualités de la représentation . . . . .	42
7.3.2	Anciens et nouveaux caractères . . . . .	42
<b>8</b>	<b>Analyse factorielle des correspondances</b>	<b>44</b>
8.1	Compléments d'algèbre linéaire . . . . .	44
8.2	Notations, définitions . . . . .	44
8.3	Résultats . . . . .	45
8.4	Interprétation . . . . .	45
<b>9</b>	<b>Régression</b>	<b>46</b>
<b>10</b>	<b>Devoirs</b>	<b>47</b>

# Chapitre 1

## Orientation

### 1.1 Contenu

L'analyse de données est une branche de la statistique descriptive ; elle cherche à représenter de grands tableaux de données. Si l'on fait remonter l'analyse factorielle aux psychologues du début du XX<sup>ème</sup> siècle c'est dans la deuxième moitié de ce siècle que l'utilisation des ordinateurs a permis une utilisation commode de ces techniques. Le principal objectif est une représentation graphique ; *je choisis donc de faire une introduction à la géométrie affine euclidienne*, en particulier les projections orthogonales sur un sous-espace affine.

Pour l'analyse de données, on pourra consulter : [3, 5, 2] ainsi que des sites internet : [6, 1]

### 1.2 Méthodologie ; classe WIMS

Cet enseignement est accompagné d'exercices à données aléatoires qui peuvent être réalisés avec le logiciel WIMS ([wims.unice.fr](http://wims.unice.fr)). De nombreux exemples numériques sont proposés à l'aide du logiciel de calcul numérique SCILAB ([www.inria.fr](http://www.inria.fr), [8]), octave ([www.octave.org](http://www.octave.org), [11]) ou Maple (calcul symbolique avec extensions numériques). Le logiciel **WIMS** ([wims.unice.fr](http://wims.unice.fr), [12]) d'enseignement assisté par ordinateur permet d'entraîner les étudiants de façon systématique ; ce logiciel est du domaine public.

Dans la classe WIMS analyse de données, vous trouvez des exercices en rapport avec ce chapitre ; pour un usage indépendant, consultez l'auteur.

Aucun logiciel spécialisé en analyse de données n'est utilisé dans ce module qui vise à maîtriser les fondements des méthodes.
--

## Chapitre 2

# Utilisation de scilab

**Scilab** est un logiciel intégré dédié au calcul numérique ; c'est un logiciel du domaine public ; il comprend à la fois un langage de programmation et des bibliothèques de sous programmes ; à noter qu'à la différence du fortran c'est un langage interprété ; l'utilisation est donc assez proche d'un système de calcul formel comme **maple** ou **maxima**. **Scilab** est développé par l'INRIA et est du domaine public : il peut être trouvé sur le site : <http://www-rocq.inria.fr/scilab> ; on peut y trouver documentation et renseignements. Citons une référence pédagogique récente [4]. D'autres systèmes similaires sont **octave** (du domaine public) et **matlab** (commercial).

Utilisez de préférence un ordinateur utilisant le système linux biens que

```
scilab&
```

fonctionne avec le système windows. Le système linux est aussi du domaine public et peut être téléchargé gratuitement mais vous le trouvez aussi en vente avec des mensuels consacrés à Linux chez votre marchand de journaux !

### 2.1 Mise en train

Si **scilab** est dans vos onglets, cliquez sur l'icône, sinon mettez dans votre chemin d'accès (`.zshenv`) : `/usr/local/bin/s` ou un chemin adapté à votre ordinateur. Pour appeler **scilab**, tapez dans une console ou xterm

```
scilab&
```

Il s'ouvre une fenetre dédiée à **scilab**, on peut y utiliser les commandes de base de l'éditeur de texte **EMACS** ; en particulier :

1. **ctrl b** (ou flèche vers gauche ← ) pour se déplacer à gauche ;
2. **ctrl f** (ou →) pour aller à droite
3. **ctrl p** (ou touche fleche vers haut ↑) pour instruction précédente ;
4. **ctrl n** (ou ↓) pour retourner à l'instruction suivante

Les commandes sont séparées par la touche 'return' ou par ' ', si elles sont tapées sur la mme ligne ; une commande terminée par ';' ne donne aucune sortie de résultats à écran à l'exécution.

**Exercice 2.1** taper quelques instructions simples

### 2.1.1 Les constantes

```
%i; %pi; %e; %eps; %t; %f
```

**Exercice 2.2** *manipuler quelques constantes reelles et complexes*

### 2.1.2 Fonctions usuelles

```
abs(-5), x=10^(-4), sqrt(x), exp(3), %e^3, log(%e^3), sin(%pi)
```

### 2.1.3 L'utilisation de matrices est très souple.

```
n=10
x=[1:n]
size(x) // vecteur ligne (1 ligne et 10 colonnes)
//multiplication terme a terme
y=x.*x
//produit scalaire
px=x*x
//transposition
x'
//saisie; voir aussi plus loin avec des fichiers
v=[1 +3]; w=[1,3]; ww=[1+ 3];
v=5:-.25:3;
v=ones(1:4); v=zeros(1:6)
a=[1 2; 6 -3]; b=ones(2,2); d=eye(3,4)
//transformer matrice de nombres en matrice chaine de caracteres
as=string(a)
p=zeros(size(a,'c'),size(a,'c'));
//Attention '*' designe le produit matriciel
a*b
//
g=sum(ap,'c')
```

Attention, pour des matrices, '\*' designe le produit matriciel

**Exercice 2.3** *Faire quelques manipulations de matrices*

## 2.2 Programmation

Attention, il est vivement déconseillé de taper un grand nombre d'instructions directement dans la fenetre **scilab**!

- taper les instructions sous emacs; *installez le mode scilab très commode*;
- pour exécuter le fichier  
'exec('nom\_fichier')

– Réaliser des fonctions! voir plus bas.  
Pour nettoyer la session : 'clear'; si le comportement de scilab est bizarre, quitter et relancer scilab!

#### Pour les matrices

- lecture :  
`a=read('plot.dat',3,5)` (3 lignes et 5 colonnes)
- écriture  
`write('plot4.dat',b)`
- pour des fichiers sur lesquels on écrit plusieurs fois, il vaut mieux utiliser un numéro d'unité logique (sinon effacer le fichier avant toute écriture) :  
`ua=file('open', status='old','plot4'); write(ua, a');`

#### Dialogues

```
exo=read(%io(1),1,1,'(a)')
write(%io(2),[exo, 'cas pas prévu'])
//afficher 2 variables x et y:
disp(x,y)
```

### 2.2.1 Fonctions

Les fonctions se mettent dans un fichier et se tapent sous emacs

```
function ydot=f(t,y)
yp(1)=y(3)
yp(2)=y(4)
r=sqrt(y(1)**2 + y(2)**2)
k=1; m=1;
yp(3)=- (k*(m/r)/r)*(y(1)/r)
yp(4)=- (k*(m/r)/r)*(y(2)/r)
ydot=yp
//
function [mu,sig2]=calcmoy(nnb)
xx=rand(nnb,1,'uniform');
mu=mean(xx)
sig2=st_deviation(xx)
//end function calcmoy
```

Pour utiliser une fonction : on va chercher le fichier par :

```
getf('fonc-rand')
```

Noter : pas de end en fin de fonction; différent d'autres langage. Il est commode de le mettre en commentaire.

**Exercice 2.4** *Utiliser ces fonctions; faire de petites modifications.*

*Réaliser une fonction pour calculer la fonction caractéristique du complémentaire d'un cercle dans un carré; calculer espérance et écart type.*

On peut aussi définir des fonctions simples en ligne :

```
deff(' [y]=fso12(x)', 'y=a*x+b+1.e-3*(x.*x)');
```

Mise au point, utiliser

```
//dans la fonction  
pause  
// a l'execution  
return  
//ou  
resume
```

### 2.2.2 Boucles

```
ninterv=22  
for i=1:ninterv ,  
    l(i)=(i)/ninterv - 1/(2*ninterv)  
end  
//  
while x<14, x=3*x, end  
//  
for i=1:ninterv ,  
    if ( ((i-1)/ninterv <= xx(n) ) & (xx(n) <= (i)/ninterv) ) then,  
        nfreq(i)=nfreq(i) +1;  
// noter break  
        break,  
    end  
end
```

### 2.2.3 Conditions

```
//noter & logique  
if ( ((i-1)/ninterv <= xx(n) ) & (xx(n) <= (i)/ninterv) ) then,  
    nfreq(i)=nfreq(i) +1;  
    break,  
end  
//  
select lecas,  
case 1, y=.3,  
case 2, y=x^2,  
case 3, y=x*sin(x)  
end
```

**Exercice 2.5** *histogrammes, moyennes, écart-type, loi des grands nombres.*

### 2.2.4 Lectures dans fichiers

Pour lire des nombres dans des fichiers, 2 méthodes :

1. tableaux de nombres utiliser :  $a=read('nomfich')$ ; le résultat est rangé dans  $a$
2. Si le fichiers contient des enregistrement du type :  $a(1,1) = 1.3e - 4$  etc, il s'agit d'instructions `scilab`; il suffit de :  $exec('nomfich2')$



## 2.3 Les bibliothèques

En cliquant sur bouton 'help', on a accès à une aide de toutes les fonctions prédéfinies ; pour des raisons d'efficacité, elles sont le plus souvent codées en fortran ! Elles sont souvent issues de la bibliothèque netlib.

Pour obtenir le temps d'exécution :

```
timer(); [m,s]=calcmoy(nnb); timer()
```

**Exercice 2.6** *A l'aide de l'aide en ligne, réaliser des calculs : sommes des termes d'un vecteur, racines carrés, sinus ; utiliser des boutons de dialogue 'x' ; tracer une courbe simple*

## 2.4 Statistiques et analyse de données

Scilab contient une librairie de statistiques et d'analyse de données.

## 2.5 Equations différentielles, optimisation

Scilab fournit différents algorithmes pour résoudre des équations différentielles et optimiser des fonctions.

## 2.6 Exemples pour l'analyse de données

La plupart de ces programmes peuvent être utilisés pour résoudre de manière interactive des exercices avec WIMS (voir la section 1.2).

### 2.6.1 Résultat matrice

Si l'on demande a Scilab d'afficher à l'écran, une matrice *proj* par une des trois methodes :

- *proj*
- *disp(proj)*
- *print(%io(2),proj)*

la sortie obtenue n'est pas acceptée par wims ; principalement parceque il y a un blanc entre le signe "-" et le nombre !

**Il convient d'utiliser :** *write(%io(2),proj)* et de copier les lignes une à une ; ceci s'applique en particulier à l'exercice (2 f4 en 2005/06).

Noton que *%io(2)* désigne la sortie à l'écran ; en général on peut mettre un nom de fichier ou d'unité logique associée.

### 2.6.2 Projections

```
//Projection du point b sur la droite passant par a et de vecteur  
//directeur tg
```

```

clear
a=zeros(2,1); b=zeros(2,1); tg=zeros(2,1),
write(%io(2),'entrer a')
a=read(%io(1),2,1 ),

write(%io(2),'entrer b')
b=read(%io(1),2,1),
write(%io(2),'entrer tg')
tg=read(%io(1),2,1 ),

ntg=sqrt(tg'*tg), // norme du vecteur directeur
tau=tg/ntg,
bat=(b-a) '*tau
pb=a+bat*tau //la projection
//verification

//Barycentre et Projection des points b sur le plan passant par a et de
//vecteurs directeur V; en 3D
clear
a=zeros(3,1); b=zeros(3,3); v=zeros(3,1); alfa=zeros(3,1);

write(%io(2),'entrer b')
b=[-98,-89,26; -44,-89,-92; -3,-38,-19];
//b=read(%io(1),3,3),
alfa=[88;48;96];
write(%io(2),'entrer a')
a=[-61;-55;30];

write(%io(2),'entrer v')
v=[-33,52;43,-53;67,29]
salfa=sum(alfa)
gb=b*alfa/salfa //barycentre

gram=v'*v;
tvb=v'*b;
alproj=(gram^(-1))*tvb;
tva=v'*a;
ala=(gram^(-1))*tva;
pa=v*ala;
pb=v*alproj;
aa=zeros(b); paa=zeros(b);
aa=[a,a,a]; paa=[pa,pa,pa];
ptb=aa+pb-paa //projections de b
gpb=ptb*alfa/salfa //barycentre des projections

```

### 2.6.3 Fonction pour Projections sur un plan et barycentre

```

//Barycentre et Projection des points b sur le plan passant par a et de
//vecteurs directeur V; en 3D
clear
dim=7; sizeb=3
a=zeros(dim,1); b=zeros(dim,sizeb); v=zeros(dim,2); alfa=zeros(sizeb,1);
q=eye(dim);

```

```

b=[-58,-88,66;90,-53,99;98,47,28;-53,69,33;8,40,40;-98,-15,41;-63,-36,-57];

alfa=[8;30;69];
a=[72;45;-77;12;8;61;43];
q(1,1)=17;
v=[35,-23;50,77;-18,-14;79,-26;-64,20;-45,-22;-71,-92]

function proj=projeter(b,a,v,q)
sizeb=size(b,2);
gram=v'*q*v;
tvb=v'*q*b;
alproj=(gram^(-1))*tvb;
pb=v*alproj; //proj de b sur plan vect V
tva=v'*q*a;
ala=(gram^(-1))*tva;
pa=v*ala; //proj de a sur plan vect V

aa=zeros(b); paa=zeros(b);
aa=a*ones(1,sizeb); paa=pa*ones(1,sizeb);;
proj=aa+pb-paa //projections de b sur plan V passant par a
endfunction //projeter

ptb=projeter(b,a,v);
// verif
verif=v'*q*(b-ptb);
salfa=sum(alfa);
gpb=ptb*alfa/salfa //barycentre des projections

gb=b*alfa/salfa //barycentre des b

ptg=projeter(gb,a,v) // proj du baryc

gpb-ptg // verif

```

## 2.6.4 Fonction pour Projections et inertie sur un plan et barycentre

```

//Barycentre et Projection des points b sur le plan passant par a et de
//vecteurs directeur V; en dim=7; inertie de b / a ce plan meth directe
clear
dim=7; sizeb=3
a=zeros(dim,1); b=zeros(dim,sizeb); v=zeros(dim,2); alfa=zeros(sizeb,1);
q=eye(dim,dim);
b=[-58,-88,66;90,-53,99;98,47,28;-53,69,33;8,40,40;-98,-15,41;-63,-36,-57];

alfa=[8;30;69];
a=[72;45;-77;12;8;61;43];
q(1,1)=17;
v=[35,-23;50,77;-18,-14;79,-26;-64,20;-45,-22;-71,-92]

function proj=projeter(b,a,v,q)
sizeb=size(b,2);
gram=v'*q*v;

```

```

tvb=v'*q*b;
alproj=(gram^(-1))*tvb;
pb=v*alproj; //proj de b sur plan vect V
tva=v'*q*a;
ala=(gram^(-1))*tva;
pa=v*ala; //proj de a sur plan vect V

aa=zeros(b); paa=zeros(b);
aa=a*ones(1,sizeb); paa=pa*ones(1,sizeb);;
proj=aa+pb-paa //projections de b sur plan V passant par a
endfunction //projeter
//
function iner=inertie(b,a,v,q,p)
    ptb=projeter(b,a,v,q);
    ptbqptb=diag((b-ptb)'*q*(b-ptb));
    sp=sum(p); p1=p/sp; // p1 poids normalise
    iner=p1'*ptbqptb;
endfunction // inertie
//
ptb=projeter(b,a,v,q);
// verif
verif=v'*q*(b-ptb);

```

### 2.6.5 Dessins de points

```

nxmin=min(nx); nxmax=max(nx); nymin=min(ny); nymax=max(ny);
xinit
plot2d([nxmin-1,nxmax+1],[nymin-1,nymax+1],[-1,-1],"021")

xnumb(nx',ny',[1:size(nx,'c')])

```

### 2.6.6 Fonctions pour l'analyse en composantes principales

*En cours de tests.*

```

//fonctions utiles de scilab:
// diag: 2 utilisations;transforme vecteur en matrice diagonale
// extrait la diagonale d'une matrice et la range dans un vecteur
//
function [d,g]=centrer(b,p);
//CENTRER
// calcul barycentre des colonnes de b et centre ces colonnes
//entrees: b matrice m,n; p vecteur de poids des colonnes n,1
// sorties: barycentre g: vecteur n,1; d: mat centree m,n
    sp=sum(p); p1=p/sp;
g=b*p1;
sizeb=size(b,2); //debog
gg=g*ones(1,sizeb);
d=b-gg;
endfunction // centrer

```

```

function co=covar(d,p,q);
//COVAR
// calcule matrice de covariance symetrique
//entrees: d: mat centree m,n; p vecteur de poids des colonnes n,1
// q matrice m,m: sur la diagonale les poids des lignes, en dehors zeros
    sp=sum(p); p1=p/sp;
    racq=sqrt(q); pp=diag(p1);
    co=racq*d*pp*d'*racq;
endfunction // fonction co=covar(d,p,q)

function [covp, covecp] = vvcpropre(co,nbre);
// VVCPPROPRE - calcul des nbre plus gde valeurs prppres et vecteurs
// propres
//entrees: co matrice m,m symetrique; nbre: nombre de valeurs propres a
//calculer
//sorties: covp matrice nbre,1 avec les plus grandes vvaleurs propres
// covecp: matrice m,nbre des vecteurs prores; en general colonnes orthonormees
[covptout,covecptout]=bdiag(co);
//tri
[svp,kvp]=sort(diag(covptout));
covp=svp(1:nbre);
dim=size(co,1); //debogue
covecp=zeros(dim,nbre);
covecp(:,1:nbre)=covecptout(:,kvp(1:nbre));
endfunction // fonction [covp, covecp] = vvcpropre(co,nbre)

function u2d = project2d(d,u,q,tol);
// PROJECT2D - les composantes (autant que de colonnes de u) de la projection des colonnes de d
// pour produit scalaire q sur
//le sous espace vectoriel defini par base orthonormee u
// si la base u n'est pas orthonormee avec tolerance tol, pas de calcul;
// (teste seulement pour u avec 2 colonnes )
//entrees: d: mat centree m,n; u matrice m,nbre;
// q matrice m,m: sur la diagonale les poids des lignes, en dehors zeros
//tol: tolerance pour orthonormalite des colonnes de u (ex 10-5)
// sorties: u2d: matrice nbre,m (les projections)
verif=u'*u;
nbv=size(u,'c');
normverif=norm(verif-eye(nbv,nbv));
if( normverif > tol)
    error('vect prop pas bien orthonormes pour tol')
end // if( normverif > tol)
//u,q,d
sq1=sqrt(q)^(-1);
uq=sq1*u;
u2d=uq'*q*d;
endfunction // fonction u2d = project2d(d,u)

function [nxmin,nxmax,nymin,nymax] = dessiner(nx,ny);
// DESSINER - dessiner (nx,ny) et ses symetriques par rapport aux axes
// et l'origine
//entree: les 2 composantes de la projection: nx matrice 1,n; ny idem
//sorties: min et max de nx et ny pour le dessin

```

```

    nxmin=min(nx); nxmax=max(nx); nymin=min(ny); nymax=max(ny);
xinit
plot2d([nxmin-1,nxmax+1],[nymin-1,nymax+1],[-1,-1],"021")
xnumb(0,0,0)
xnumb(nx',ny',[1:size(nx,'c')])')
xtitle("projection des individus sur plan A.C.P.")
//
nx=-nx;
    nxmin=min(nx); nxmax=max(nx);
    xinit
plot2d([nxmin-1,nxmax+1],[nymin-1,nymax+1],[-1,-1],"021")
xnumb(0,0,0)
xnumb(nx',ny',[1:size(nx,'c')])')
xtitle("projection des individus sur plan A.C.P., sym y")
//
ny=-ny;
    nymin=min(ny); nymax=max(ny);
    xinit
plot2d([nxmin-1,nxmax+1],[nymin-1,nymax+1],[-1,-1],"021")
xnumb(0,0,0)
xnumb(nx',ny',[1:size(nx,'c')])')
xtitle("projection des individus sur plan A.C.P., sym 0")
//
nx=-nx;
    nxmin=min(nx); nxmax=max(nx);
    xinit
plot2d([nxmin-1,nxmax+1],[nymin-1,nymax+1],[-1,-1],"021")
xnumb(0,0,0)
xnumb(nx',ny',[1:size(nx,'c')])')
xtitle("projection des individus sur plan A.C.P., sym x")
endfunction // fonction [nxmin,nxmax,nymin,nymax] = dessiner(nx,ny)

function rho = calcrho(d,u,p,q)
// CALCRHO - calcul de rho pour interpretation des axes
//entrees: d: mat centree m,n; u matrice m,nbre, vect pr
//orhtnonormes;
// le prog calc les vect Q orthon
// q matrice m,m: sur la diagonale les poids des lignes, en dehors zeros
//sorties: rho matrice m,m
x=d'; sp=sum(p); pp=diag(p)/sp;
sq1=sqrt(q)^(-1); uq=sq1*u;
v=d'*q*uq;
r=x'*pp*v;
rho=zeros(size(d,'r'),size(u,'c'));
for k=1:size(d,'r')
    for j=1:size(u,'c')
        npk=sqrt(x(:,k)')*pp*x(:,k));
        npvj=sqrt(v(:,j)')*pp*v(:,j));
        rho(k,j)=r(k,j)/(npk*npvj);
    end
end
endfunction // fonction rho = calcrho(d,u,q)

function [] = tracerho(rho)

```

```

// TRACERHO - dessin rho
// les symetries sont a faire
  cx=rho(:,1); cy=rho(:,2);

xinit()
  square(-1,1,-1,1)
  plot2d([-1,1],[-1,1],[-1,-1],"021");
xnumb(cx',cy',[1:size(d,'r')]')
  xarc(-1,1,2,2,0,360*64)
  xtitle("1:rho, anciens et nouveaux caracteres")
xinit
  square(-1,1,-1,1)
  plot2d([-1,1],[-1,1],[-1,-1],"021");
xnumb(-cx',cy',[1:size(d,'r')]')
  xarc(-1,1,2,2,0,360*64)
  xtitle("2:rho, anciens et nouveaux caracteres")
xinit
  square(-1,1,-1,1)
  plot2d([-1,1],[-1,1],[-1,-1],"021");
xnumb(cx',-cy',[1:size(d,'r')]')
  xarc(-1,1,2,2,0,360*64)
  xtitle("3:rho, anciens et nouveaux caracteres")
xinit
  square(-1,1,-1,1)
  plot2d([-1,1],[-1,1],[-1,-1],"021");
xnumb(-cx',-cy',[1:size(d,'r')]')
  xarc(-1,1,2,2,0,360*64)
  xtitle("4:rho, anciens et nouveaux caracteres")
endfunction // fonction [] = tracerho(rho)

```

## 2.6.7 Fonctions pour l'AFC

```

function [xpc,pc,qc,ypl,pl,ql,h]=afc_mat(n_mat)
// npied est le n^i nmain est n_j
  n=n_mat;
  for i=1:size(n,'c')
    npied(i)=sum(n(:,i));
  end
  for j=1:size(n,'r')
    nmain(j)=sum(n(j,:));
  end
  nbar=sum(n);
  h=zeros(size(n,'r'),size(n,'c'));
  for i=1:size(n,'c'),
    for j=1:size(n,'r'),
      h(j,i)=n(j,i)/sqrt(npied(i)*nmain(j))-sqrt(npied(i)*nmain(j))/nbar;
    end,
  end,
  // calcul des 2 matrices X de profil des colonnes
  // et Y de profil des lignes.
  for iacp=1:2
    //

```

```

select iacp
//
case 1 then,
// profil de s colonnes
xpc=zeros(n);
for i=1:size(n,'c')
    xpc(:,i)=n(:,i)/npied(i);
end
//les poids pour profil col
p=eye(size(n,'c'),size(n,'c'));
q=eye(size(n,'r'),size(n,'r'));
p=diag(npied/nbar);

qinv=diag(nmain/nbar); q=qinv^(-1);
pc=p; qc=q;
//racq=sqrt(q);
//a=xpc;
//
case 2 then
// profil des lignes
ypl=zeros(n);
for j=1:size(n,'r'),
    ypl(j,:)=n(j,:)/nmain(j);
end
//les poids pour profil ligne: on echange p et q
q=eye(size(n,'c'),size(n,'c'));
p=eye(size(n,'r'),size(n,'r'));
qinv=diag(npied/nbar); q=qinv^(-1); racq=sqrt(q);
p=diag(nmain/nbar);
pl=p; ql=q;
//    a=ypl';
//
else
    write(%io(2),[iacp, 'cat pas prevu']),;
end

end // for iacp=1:2
endfunction // fonction [xpc,pc,qc,ypl,pl,ql]=afc_mat(n_mat)
//-----

function [inertc,inertl,uc2d,ul2d,covpc,vptoutc] = afc_calcul(xpc,pc,qc,ypl,pl,ql,h)
// AFC_CALCUL - calcul AFC
// modif 6/12/05 (covpc,les 2 plus grandes vp de xpc; vptoutc, ttes vp
// décroissantes de xpc)

for iacp=1:2
select iacp
case 1 then
    b=xpc; p=diag(pc); q=qc;
case 2 then
    b=ypl'; p=diag(pl); q=ql;
end // select iacp

[d,g]=centrer(b,p);

```



```

co=covar(d,p,q);

tol=10^(-5);
// udver=projeter(b,g,u,q)

select iacp
case 1 then
  nbre=2;
  [covp,covecp]=vvcpropre(co,nbre);
  sizeb1=size(b,1);
  covpc=covp;
  vptoutc=vvcpropre(co,sizeb1);
  uc=((sqrt(q)) )^(-1)*covecp;
  inertc=inertie(b,g,uc,q,p);
  inertc1=sum(vptoutc)-sum(covp);
  uc2d=project2d(d,covecp,q,tol);
case 2 then
  nbre=2;
  [covp,covecp]=vvcpropre(co,nbre);
  sizeb1=size(b,1);
  vptoutl=vvcpropre(co,sizeb1);
  ul=((sqrt(q)) )^(-1)*covecp;
  [ul]= orient_uluc(uc,ul,h)
  [covecp_orie]=orient_uluc(uc,covecp,h);
  inertl=inertie(b,g,ul,q,p);
  inertl1=sum(vptoutl)-sum(covp);
  ul2d=project2d(d,covecp,q,tol);
end
end // for iacp=1:2
endfunction // function [inertc,inertl,uc2d,ul2d,covpc,vptoutc] = afc_calcul(xp//c,pc,qc,ypl,pl,ql,h

//-----
function [ul] = orient_uluc(uc,ul,h)
// ORIENT_ULUC -
//
  ulhuc=ul'*h'*uc;

  for i=1:2;
com=" attention a rien!";
  if (ulhuc(i,i) < 0) then;
    ul(:,i)=-ul(:,i);
  end; // if
  end //for i
endfunction //function orient_uluc

//-----
function []=dessinafc(uc2d,ul2d)
// dessin des projections de 2 acp sur le meme graphique (AFC);
// avec les 3 symetries
  numcx=uc2d(1,:); numcy=uc2d(2,:)
  numlx=ul2d(1,:); numly=ul2d(2,:)
// mettre les numeros des individus sur graphique
axexm=1.1*min(min(numcx),min(numlx));axexp=1.1*max(max(numcx),max(numlx));

```

```

axeym=1.1*min(min(numcy),min(numly));axeyp=1.1*max(max(numcy), max(numly));

//xset("use color",1)
xinit

xset("wdim",100,100)
square(-1,1,-1,1)
// plot2d([axexm,axexp],[axeym,axeyp],[-1,-1],"021");
plot2d([-1,1],[-1,1],[-1,-1],"021");
// plot2d([-6,6],[-4,4],[-1,-1],"021");
xnumb(0,0,0)
xnumb(numcx',numcy',[1:size(numcx,'c')])')
xnumb(numlx',numly',-[1:size(numlx,'c')])',1)
xtitle("projection des 2 caracteres sur plan A.F.C.")
xgrid(3)
//
xinit
xset("wdim",100,100)
square(-1,1,-1,1)
plot2d([-1,1],[-1,1],[-1,-1],"021");
xnumb(0,0,0)
xnumb(-numcx',numcy',[1:size(numcx,'c')])')
xnumb(-numlx',numly',-[1:size(numlx,'c')])',1)
xtitle("projection des 2 caracteres sur plan A.F.C., sym/y")
xgrid(3)
//
xinit
xset("wdim",100,100)
square(-1,1,-1,1)
plot2d([-1,1],[-1,1],[-1,-1],"021");
xnumb(0,0,0)
xnumb(numcx',-numcy',[1:size(numcx,'c')])')
xnumb(numlx',-numly',-[1:size(numlx,'c')])',1)
xtitle("projection des 2 caracteres sur plan A.F.C., sym/x")
xgrid(3)
//
xinit
xset("wdim",100,100)
square(-1,1,-1,1)
plot2d([-1,1],[-1,1],[-1,-1],"021");
xnumb(0,0,0)
xnumb(-numcx',-numcy',[1:size(numcx,'c')])')
xnumb(-numlx',-numly',-[1:size(numlx,'c')])',1)
xtitle("projection des 2 caracteres sur plan A.F.C.,sym/0")
xgrid(3)
endfunction // fonction dessinafc(uc2d,ul2d)

//-----

```

## 2.6.8 Un exemple d'AFC

Avec :  $la=6$   $ca=5$   $n_{mat} = [0.98958313, 0.29756612, 0.23390338, 0.201664, 0.31026563; 0.29884854, 0.69613987, 0.963142$

voici le bon dessin obtenu avec scilab ( et la fonction *orient<sub>u</sub>luc*) ici et le bon dessin proposé par wims :  
ici wims

## Chapitre 3

# Logiciel gnuplot

Scilab contient de nombreuses possibilités graphiques mais vous pouvez aussi utiliser `gnuplot` Le logiciel `gnuplot` permet de tracer des courbes et surfaces ainsi que des points ;

Pour tracer des point en tridimensionnel :

```
gnuplot
splot 'nom_fichier'
splot 'plot4' with points pointtype 1, 'plotg' with points pointtype 2,
'plotdp' with points pointtype 3 title 'le trace '
```

*nom\_fichier* contient la liste des coordonnées des points, écrits en ligne!

# Chapitre 4

## Equations, intersections, projections

### en géométrie affine euclidienne

#### 4.1 Introduction

##### 4.1.1 Références à utiliser

1. Pour une initiation on pourra consulter dans le site de l'Université en ligne, (<http://www.uel-pcsm.education.fr>), [10] le chapitre introduction géométrique de l'algèbre linéaire.
2. Enfin travailler dans les documents de WIMS ([12, 7]) : “Comment construire des sous espaces vectoriels” de B. Perrin-Riou et M. Deschamps. A noter aussi un site de documents pour les enseignants du secondaire : [9].

##### 4.1.2 Guide d'activité

Le but de ce chapitre est de rappeler et manipuler les différents types d'équations pour représenter des sous espaces affines et les utiliser pour déterminer des projections orthogonales.

Ce point de vue géométrique pourra permettre de comprendre des méthodes très utilisées en pratique comme *la méthode des moindres carrés* ou *l'analyse en composantes principales*.

#### Prérequis

1. Notions géométriques de T.S : droites du plan ou de l'espace affine ; droites et plans de l'espace affine ; barycentres ; produits scalaires.
2. Espaces vectoriels : sous-espaces vectoriels, bases ; applications linéaires, matrices ; produit scalaire.
3. On considère une espace affine  $\mathbf{E}$  de direction l'espace vectoriel  $\vec{\mathbf{E}}$ . A tout couple de points  $A$  et  $B$  de l'espace affine  $\mathbf{E}$ , on peut associer un vecteur unique  $\vec{u}$  de l'espace vectoriel  $\vec{\mathbf{E}}$  tel que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ . L'application qui associe  $\vec{u}$  à un couple de points  $A, B$  n'est pas injective.
4. Si l'on fixe un point  $O$ , on peut associer à tout point  $A$ , un vecteur unique  $\vec{u}$  tel que  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  et réciproquement ; en d'autres termes, on peut identifier un espace affine muni d'un point origine et un espace vectoriel. *Intuitivement on peut dire que si l'on oublie l'origine dn espace vectoriel, il reste un espace affine*

5. **Représentation graphique** : en *algèbre linéaire*, vous avez dû prendre l'habitude de représenter les vecteurs partant tous de la même origine. L'espace dans lequel nous vivons est affine : on ne peut pas dessiner de vecteurs mais des couples de points auxquels on peut associer des vecteurs selon la formule ci-dessus. Si l'on se place dans un espace vectoriel, on peut associer à 2 vecteurs  $\vec{p}$  et  $\vec{q}$ , un vecteur  $\vec{u} = \vec{q} - \vec{p}$ ; on notera aussi ce vecteur  $\vec{pq}$ .

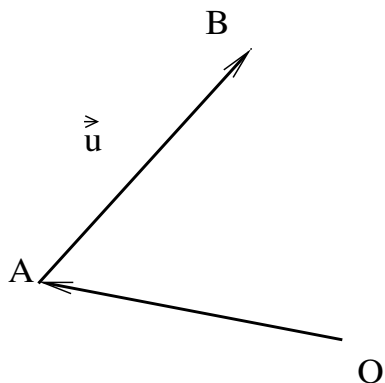


FIG. 4.1 – vecteur

6. **Relation de Chasles** :  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ ,  $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$   
 $\vec{AD} - \vec{AB} = \vec{BD}$

**Remarque 1** En particulier  $\vec{OD} - \vec{OB}$  est un vecteur indépendant du point  $O$  !

**Exercice 4.1** *Dessin (triangle et parallélogramme) de somme et soustraction de vecteurs*

*Un exemple avec des données numériques et dessin.*

7. Quand on considère un sous espace affine  $\mathbf{F}$  d'un espace vectoriel  $\vec{\mathbf{E}}$  : la différence de deux vecteurs de ce sous espace affine est dans un sous espace vectoriel  $\vec{\mathbf{F}}$ .

Dans un un sous espace affine  $\mathbf{F}$  d'un espace affine  $\mathbf{E}$  : pour deux points  $a$  et  $m$  de ce sous espace, le vecteur  $\vec{am}$  est dans un sous espace vectoriel  $\vec{\mathbf{F}}$ .

Dans les 2 cas on a une caractérisation d'un sous espace affine à l'aide d' un point  $a \in \mathbf{F}$  fixé :

$$m \in \mathbf{F} \Leftrightarrow \vec{am} \in \vec{\mathbf{F}} \quad (4.1)$$

**Remarque 2** Conformément à la remarque 1, cette définition de sous espace affine est bien **indépendante** de la position du point  $a$  choisi !

$$\vec{a'm} = \vec{a'a} + \vec{am}$$

**Exercice 4.2** Justifier la remarque précédente

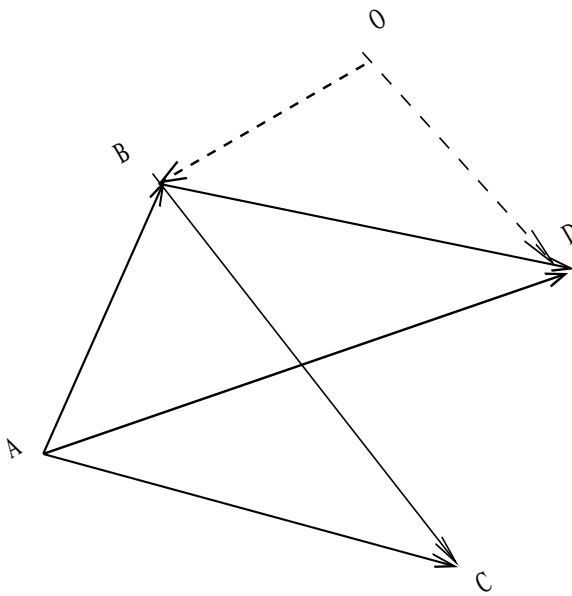
8. Espace affine **euclidien** : l'espace vectoriel associé est euclidien, c' est à dire muni d'un produit scalaire. Dans un tel espace affine, on dispose de notions de distance et d'angle par suite l'orthogonalité et les repères orthonormés sont définis !

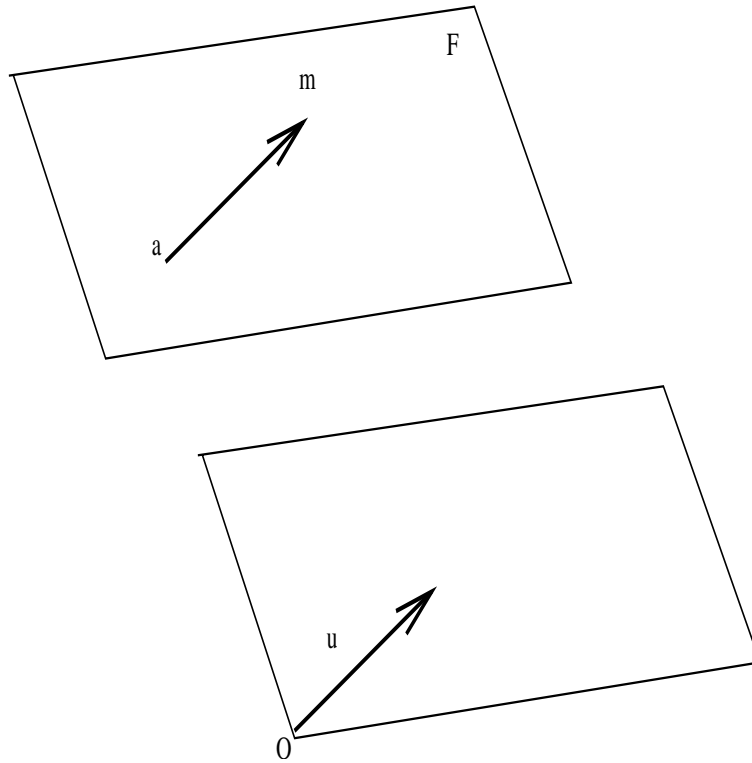
*Dans toute la suite quand on parle d'orthogonalité, on suppose que l'espace est euclidien.*

**Remarque 3** Les équations posées sont le plus souvent écrites vectoriellement sans utiliser de repre. Ceci est très utile dans le plan mais devient presque indispensable à partir de la dimension 3.

## Programme du module d' analyse de données de licence MASS

Prérequis : espaces vectoriels euclidiens, calcul matriciel ; notions élémentaires de géométrie affine euclidienne.





- Compléments de géométrie affine euclidienne : . équations paramétrées et implicites (ou cartésiennes) de droites et plans affines dans un espace vectoriel de grandes dimensions. . Projection orthogonale sur un plan affine (dans un espace vectoriel de grandes dimensions); conservation des barycentres par projection. . Inertie par rapport à un plan affine; détermination du plan qui minimise l'inertie d'un système de points par rapport à ce plan
- - analyse en composantes principales; interprétation des graphiques.
- - analyse factorielle des correspondances; interprétation des graphiques.
- - Régression linéaire multiple
- - Classification : quelques algorithmes ( nuées dynamiques etc).

### 4.1.3 Méthodologie ; classe WIMS

De nombreux exemples numériques sont proposés à l'aide du logiciel de calcul numérique SCILAB ([www.inria.fr](http://www.inria.fr), [8]), octave ([www.octave.org](http://www.octave.org), [11]) ou Maple (calcul symbolique avec extensions numériques). Le logiciel **WIMS** ([wims.unice.fr](http://wims.unice.fr), [12]) d'enseignement assisté par ordinateur permet d'entraîner les étudiants de façon systématique; ce logiciel est du domaine public.

Dans la classe WIMS analyse de données, vous trouvez des exercices en rapport avec ce chapitre.

Aucun logiciel spécialisé en analyse de données n'est utilisé dans ce module qui vise à maîtriser les fondements des méthodes.

## 4.2 Droite du plan

On se place dans un espace affine associé à un espace vectoriel de dimension 2. Quand on parle de vecteur **normal**, le plan est supposé **euclidien**. Les rappels et exercices ont pour but de réviser mais surtout d'utiliser des méthodes qui passent en plus grande dimension.



Dans tout ce paragraphe,  $O$  est un point fixé choisi comme origine dans le plan affine.

1. **Droite du plan** : Vecteur directeur et vecteur normal d'une droite vectorielle et affine du plan.

	vecteur directeur	vect. dir. unitaire	vect.norm.	vect. normal unitaire
droite vectorielle $D_0$	$b \in D_0, \vec{u} = \vec{ob}$	$\vec{\tau} = \frac{\vec{u}}{\ \vec{u}\ }$	$\vec{v} \cdot \vec{\tau} = 0$	$\vec{\nu} = \frac{\vec{v}}{\ \vec{v}\ }$
droite affine $D_a$	$a, b \in D_a, \vec{u} = \vec{ab}$	"	"	"

2. **Équation paramétrique ou cartésienne (implicite)** :

(a) *Eq. paramétrique avec 1 point et 1 vecteur directeur*

$$m(\lambda) = a + \lambda \vec{\tau} \quad (4.2)$$

$$\text{ou avec 2 points : } m(\mu) = a + \mu(\vec{ab}) \quad (4.3)$$

$$(4.4)$$

(b) *équation cartésienne (1 point et 1 vecteur normal).*

$$(\vec{am}) \cdot \vec{\nu} = 0 \quad (4.5)$$

	eq. paramétrique	eq. cartésienne (implicite)
droite vect $D_0$	$\vec{om} = \lambda \vec{u}$	$\vec{om} \cdot \vec{\nu} = 0$
droite affine $D_a$	$m = a + \lambda \vec{u}$	$\vec{am} \cdot \vec{\nu} = 0$

(c) *Avec un repère cartésien,  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  et le vecteur directeur :*

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \beta_1 - \alpha_1 \\ \beta_2 - \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

l'équation paramétrique fournit 2 équations :

$$(4.7)$$

$$x = \alpha_1 + \lambda(\beta_1 - \alpha_1) \quad (4.8)$$

$$y = \alpha_2 + \lambda(\beta_2 - \alpha_2) \quad (4.9)$$

$$\text{en particulier avec} \quad (4.10)$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ u_2 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

$$x = \lambda \quad (4.12)$$

$$y = b_2 + \lambda u_2 \text{ ou l'équation bien connue } y = u_2 x + b_2 \quad (4.13)$$

$$(4.14)$$

(d) *Avec un repère orthonormé, 1 équation cartésienne (implicite)*

$$(x - a_1)v_1 + (y - a_2)v_2 = 0 \quad \text{ou} \quad (4.15)$$

$$v_1 x + v_2 y = v_1 a_1 + v_2 a_2 \quad (4.16)$$

**Exercice 4.3** (a) *Exemples d'équation paramétrique avec des données numériques et dessin.*

(b) *Exemples d'équation cartésienne avec des données numériques et dessin.*

**Exercice 4.4** (a) *Rappeler l'équation barycentrique d'une droite*

(b) *Rappeler comment passer d'une représentation paramétrique à une représentation barycentrique.*

**Exercice 4.5** *Sujet interdisciplinaire : Barycentre et moment d'un système de forces en mécanique.*

3. **Droites // ; droites orthogonales (pour représentation paramétrique ou cartésienne).**

– Droites parallèles :

$$\overrightarrow{am} = \lambda_1 \vec{u}, \quad \overrightarrow{bm} = \lambda_2 \vec{u}$$

ou

$$\overrightarrow{am} \cdot \vec{v} = 0, \quad \overrightarrow{bm} \cdot \vec{v} = 0$$

– Droites orthogonales :

$$\overrightarrow{am} = \lambda_1 \vec{u}, \quad \overrightarrow{dm} \cdot \vec{u} = 0$$

ou

$$\overrightarrow{am} = \lambda_1 \vec{u}, \quad \overrightarrow{bm} = \lambda_2 \vec{v}$$

avec  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Utiliser des vecteurs directeurs ou normaux suivant les cas.

**Exercice 4.6** *Un exemple avec des données numériques et dessin.*

4. **Projection orthogonale d'un point  $b$  sur une droite vectorielle  $D_0$  et affine  $D_a$  (équation paramétrique décrite avec 1 vecteur directeur).**

**Rappel :** la projection orthogonale de  $b$  est caractérisée par :

$$\begin{aligned} (\vec{b} - \tilde{P}_{D_a} \vec{b}) \cdot \vec{\tau} &= 0 \text{ et } \tilde{P}_{D_a} \vec{b} \in D_a \text{ cette appartenance qui peut se traduire par :} \\ (\tilde{P}_{D_a} \vec{b} - a) \cdot \vec{v} &= 0 \text{ ou bien } \tilde{P}_{D_a} \vec{b} = a + \lambda \vec{u}. \end{aligned}$$

Dans le cas où  $\vec{\tau}^2 = 1$  on a :

$$P_{D_0} \vec{b} = (\vec{b} \cdot \vec{\tau}) \vec{\tau} \tag{4.17}$$

$$\tilde{P}_{D_a} \vec{b} = \vec{a} + [(\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{\tau}] \vec{\tau} \tag{4.18}$$

$$\tilde{P}_{D_a} \vec{b} = \vec{a} + P_{D_0}(\vec{b} - \vec{a}) \tag{4.19}$$

$$\tilde{P}_{D_a} \vec{b} = \vec{a} - P_{D_0} \vec{a} + P_{D_0} \vec{b} \quad \text{on utilise parfois un vecteur pivot :} \tag{4.20}$$

$$p = \vec{a} - P_{D_0} \vec{a} \quad \text{alors} \quad \tilde{P}_{D_a} \vec{b} = p + P_{D_0} \vec{b} \tag{4.21}$$

pour le cas affine : 2 interprétations avec dessin.

**Exercice 4.7** – *Un exemple avec des données numériques et dessin.*

- Projection orthogonale sur une droite // à un axe.
- Généraliser au cas où l'on dispose de vecteur directeur (ou normal) non unitaire.
- Projection sur une droite d'un nuage de points du plan ; exemple avec 2 droites bien placées.
- Retrouver la formule de distance d'un point à une droite.

**Remarque 4** *Projection sur  $D_{a^\perp}$  :  $\tilde{P}_{D_{a^\perp}} \vec{b} = \vec{a} + P_{D_0^\perp}(\vec{b} - \vec{a})$  : et l'on a :*

$$b - a = \tilde{P}_{D_a} \vec{b} - a + \tilde{P}_{D_{a^\perp}} \vec{b} - a$$

*Cette dernière formule n'est autre que celle de la décomposition d'un vecteur selon deux axes orthogonaux !*

5. **Vecteur orthogonal à un vecteur donné par projection** Pour calculer un vecteur orthogonal à un vecteur unitaire  $\tau$  : Calculer pour un vecteur  $w$ , sa projection orthogonale sur la droite vectorielle de vecteur directeur  $\tau$  :  $P_{\vec{\tau}} w = (\vec{w} \cdot \vec{\tau}) \vec{\tau}$  ; si  $w \neq P_{\vec{\tau}} w$ , un vecteur orthogonal :  $\vec{v} = \frac{w - P_{\vec{\tau}} w}{\|w - P_{\vec{\tau}} w\|}$

**Exercice 4.8** *Autres méthodes pour vecteur orthogonal : ex : rotation ;  $\nu \cdot \tau = 0$  ; en repère orthonormé, vérifier :  $\nu = \begin{pmatrix} -\tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal !*

**Exercice 4.9** Faire la feuille "droites du plan" de la classe analyse de données sur wims.

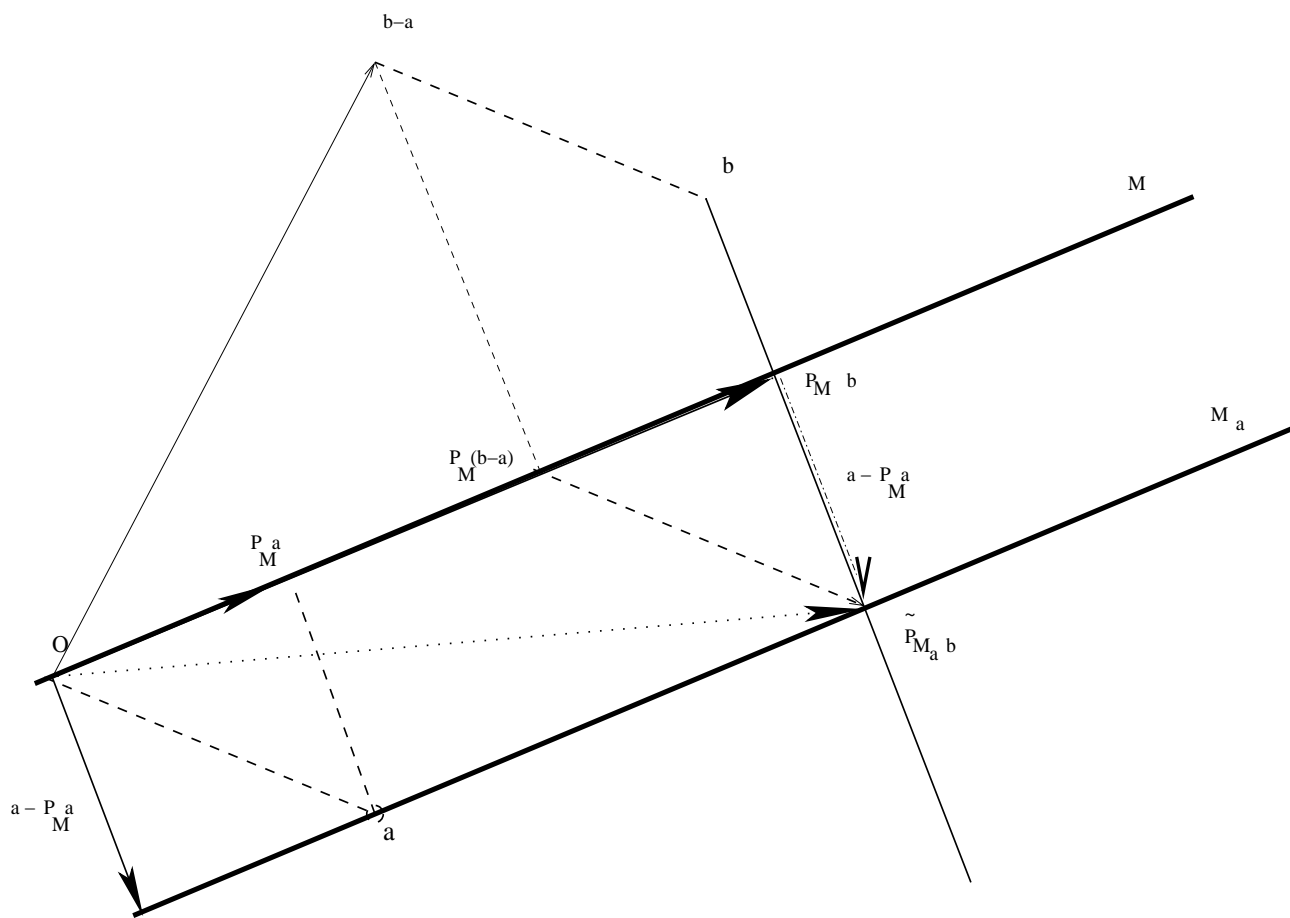


FIG. 4.3 – projection bidimensionnelle

## 4.3 Plan et droite dans l'espace tridimensionnel

On se place dans un espace affine associé à un espace vectoriel de dimension 3. Quand on parle de vecteur **normal**, l'espace est supposé **euclidien**. Les rappels et exercices ont pour but de réviser mais **surtout d'utiliser des méthodes qui passent en plus grande dimension**.

Dans tout ce paragraphe,  $O$  est un point fixé choisi comme origine dans l'espace affine.

### 4.3.1 Plan dans l'espace

1. **Plan dans l'espace** : vecteurs directeurs et normal.

	vecteurs directeurs	vect.normal	v. norm. unitaire
plan vectoriel $\mathcal{P}_0$	$b_1, b_2 \in \mathcal{P}_0, \vec{u}_i = \vec{ob}_i, i = 1, 2$	$\vec{v} \cdot \vec{u}_i = 0, i = 1, 2$	$\vec{v} = \frac{\vec{v}}{\ \vec{v}\ }$
plan affine $\mathcal{P}_a$	$a, b_1, b_2 \in \mathcal{P}_a, \vec{u}_i = \vec{ab}_i, i = 1, 2$	"	"

Les vecteurs  $u_i$  peuvent être orthonormalisés.

2. **Equation paramétrique et implicite**

	eq. paramétrique	eq. cartésienne (implicite)
plan vect $\mathcal{P}_0$	$\vec{om} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2$	$\vec{om} \cdot \vec{v} = 0$
plan affine $\mathcal{P}_a$	$m = a + \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2$	$\vec{am} \cdot \vec{v} = 0$

3. **Equation paramétrique**  $\leftrightarrow$  **Equation cartésienne** Données : on dispose de 2 vecteurs directeurs :  $u_1, u_2$  ; en trois dimension, on peut trouver un vecteur orthogonal  $v = u_1 \wedge u_2$ .

Voici une autre *démarche* qui passe en plus grande dimension et qui redonne ce vecteur : on écrit que les vecteurs  $u_1, u_2, \vec{am}$  sont liés : le déterminant de leurs composantes est nul  $\det(u_1, u_2, \vec{am}) = 0$  ; ceci est identique car :  $\det(u_1, u_2, \vec{am}) = (u_1 \wedge u_2) \cdot \vec{am}$

**Remarque 5** Avec un repère cartésien, on a 3 équations paramétriques avec 2 paramètres ; 1 équation cartésienne avec 3 inconnues.

1. équation cartésienne d'un plan vectoriel orthogonal à un vecteur donné  
**Exercice 4.10** Un exemple avec des données numériques et dessin.
2. équation paramétrique d'un plan vectoriel défini par 2 vecteurs du plan.  
**Exercice 4.11** Un exemple avec des données numériques et dessin.
3. équation cartésienne d'un plan affine orthogonal à un vecteur donné et passant par le point a.  
**Exercice 4.12** Un exemple avec des données numériques et dessin.
4. équation paramétrique d'un plan affine défini par 2 vecteurs du plan et passant par le point a.  
**Exercice 4.13** Un exemple avec des données numériques et dessin.

### 4.3.2 Droite dans l'espace

1. **Vecteur directeur et vecteurs normaux.**

	vecteur directeur	vect. dir. unitaire	vect.normaux
droite vectorielle $D_0$	$b \in D_0, \vec{u} = \vec{ob}$	$\vec{\tau} = \frac{\vec{u}}{\ \vec{u}\ }$	$\vec{v}_i \cdot \vec{\tau} = 0, i = 1, 2$
droite affine $D_a$	$a, b \in D_a, \vec{u} = \vec{ab}$	"	"

2. **Equation paramétrique et cartésienne (implicite).**

	eq. paramétrique	eq. cartésienne (implicite)
dte vect $D_0$	$\vec{om} = \lambda \vec{u}$	$\vec{om} \cdot \vec{v}_i = 0, i = 1, 2$
dte affine $D_a$	$m = a + \lambda \vec{u}$	$\vec{am} \cdot \vec{v}_i = 0, i = 1, 2$

3. **Equation cartésienne**  $\mapsto$  **équation paramétrique** Situation “duale” de celle du plan, on dispose de  $v_1, v_2$  et l’on a besoin d’un vecteur directeur orthogonal à ces 2 vecteurs ; mêmes méthodes.

Les vecteurs  $v_i, i = 1, 2$  peuvent être orthonormalisés.

**Remarque 6** Avec un repère cartésien, on 3 équations paramétriques avec 1 paramètre ; mais 2 équations cartésiennes avec 3 inconnues. Les équation cartésiennes s’écrivent par exemple :

$$\nu_{11}(m_1 - a_1) + \nu_{21}(m_2 - a_2) + \nu_{31}(m_3 - a_3) = 0 \quad (4.22)$$

$$\nu_{12}(m_1 - a_1) + \nu_{22}(m_2 - a_2) + \nu_{32}(m_3 - a_3) = 0 \quad (4.23)$$

1. équation paramétrique : 1 point et 1 vecteur ; 2 points.

**Exercice 4.14** Un exemple avec des données numériques et dessin.

2. équation cartésienne avec 1 point et 2 vecteurs normaux ; intersection de 2 plans passant par le point.

**Exercice 4.15** Un exemple avec des données numériques et dessin.

**Exercice 4.16** Trouver une équation paramétrique d’une droite définie par équation cartésienne. (lien avec le théorème des fonctions implicites).

**Exercice 4.17** feuille droites et plans (equations, intersections, projections) **de la classe capes-br de WIMS**

### Intersection de droite et plan

- Le plus simple est de disposer d’une équation paramétrique de la droite et d’une équation cartésienne du plan :

$$\overrightarrow{am} = \lambda \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a'm} \cdot \vec{v} = 0 \quad (4.24)$$

On reporte l’équation de la droite dans celle du plan ce qui donne une équation pour déterminer  $\lambda$  ; on en déduit  $\overrightarrow{am}$ .

- Dans le cas d’une droite définie par une équation catésienne et d’un plan paramétré :

$$\overrightarrow{a'm} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{am} \cdot \vec{v}_i = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad (4.25)$$

On reporte l’équation du plan dans celle de la droite et l’on obtient un système de 2 équation à 2 inconnues  $(\lambda_1, \lambda_2)$ .

- Deux droites paramétriques :

$$\overrightarrow{am} = \lambda \vec{u}; \quad \overrightarrow{a'm} = \lambda' \vec{u}'; \quad \overrightarrow{aa'} = \lambda \vec{u} - \lambda' \vec{u}'; \quad (4.26)$$

Démarche :  $\overrightarrow{aa'}$  appartient au plan engendré par  $\vec{u}, \vec{u}'$  ssi  $\det(\overrightarrow{aa'}, \vec{u}, \vec{u}') = 0$ . On peut plus directement calculer  $\lambda, \lambda'$  avec 2 équations et reporter dans la troisième pour vérifier la compatibilité.

- Deux droites cartésiennes :

$$\overrightarrow{am} \cdot \vec{v}_i = 0; \quad \overrightarrow{a'm} \cdot \vec{v}'_i = 0; \quad i = 1, 2 \quad (4.27)$$

$$\overrightarrow{om} \cdot \vec{v}_i = \overrightarrow{oa} \cdot \vec{v}_i; \quad i = 1, 2 \quad \overrightarrow{om} \cdot \vec{v}'_i = \overrightarrow{oa'} \cdot \vec{v}'_i; \quad i = 1, 2 \quad (4.28)$$

Pour déterminer le point  $m$  d’intersection, on a 4 équations pour 3 inconnues ; on prend 3 équations pour déterminer  $m$  et on vérifie la comptabilité avec un bordant (revoir les systèmes surdéterminés) ou on reporte dans la troisième équation.

- L’intersection d’une droite et d’un plan tous deux paramétriques ou tous deux cartésiens conduit à un système de 3 équations à 3 inconnues qui a une solution unique si les 3 vecteurs impliqués sont linéairement indépendants (droite et plan non parallèle)

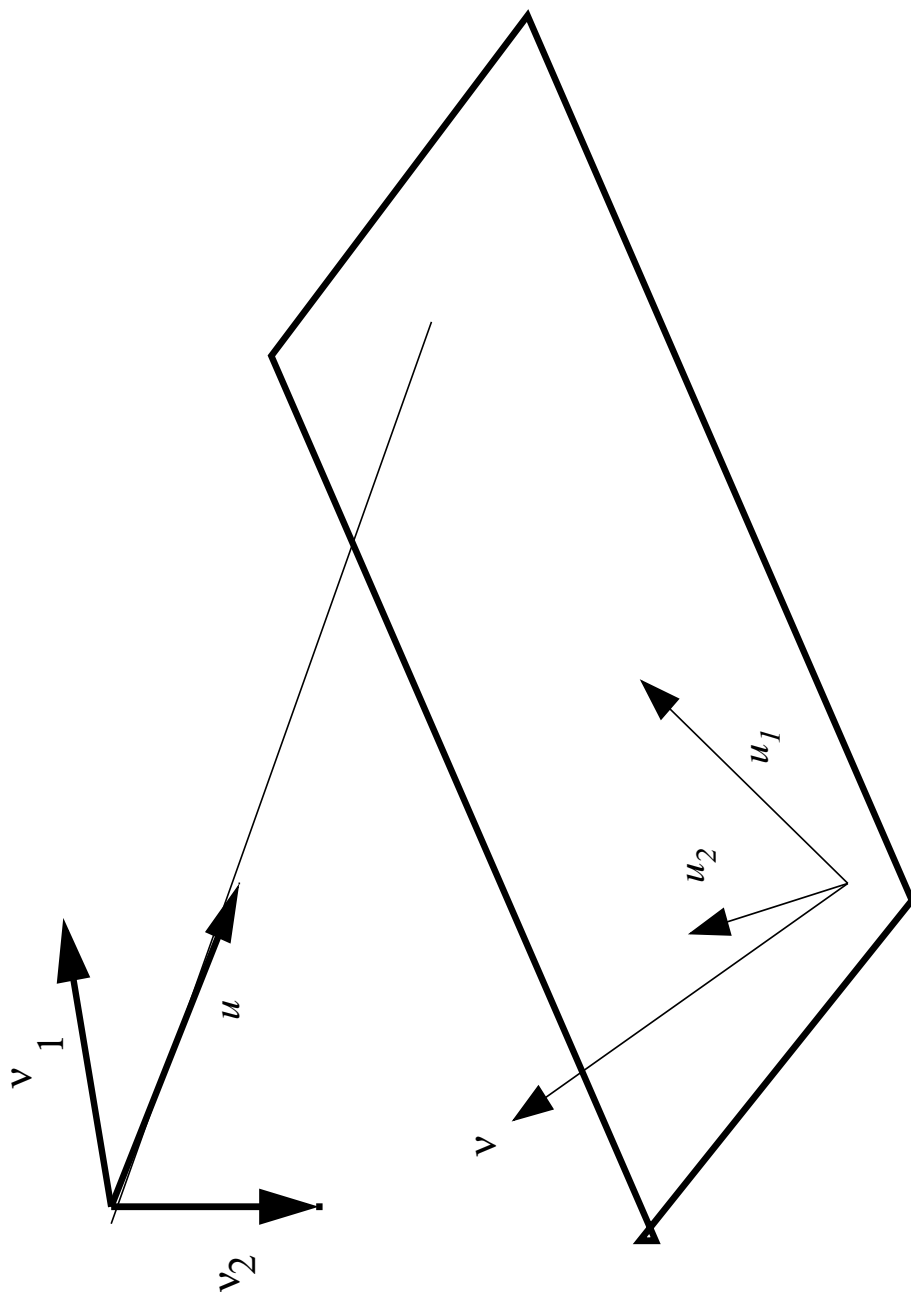


FIG. 4.4 – Intersection de droite et plan

### 4.3.3 Projection sur un plan

La projection est caractérisée par :

avec vecteurs directeurs	avec vecteur normal
$(\vec{b} - \tilde{P}_{\mathcal{P}_a} \vec{b}) \cdot u_\alpha = 0$	$(\vec{b} - \tilde{P}_{\mathcal{P}_a} \vec{b}) = \beta \nu$
$\tilde{P}_{\mathcal{P}_a} \vec{b} = a + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$	$((\tilde{P}_{\mathcal{P}_a} \vec{b}) - a) \cdot \nu = 0$

En pratique, on la détermine par l'une des 2 méthodes suivantes.

**Première méthode,** avec les vecteurs directeurs.

$\tilde{P}_{\mathcal{P}_a} \vec{b} = a + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$  et  $(\vec{b} - \tilde{P}_{\mathcal{P}_a} \vec{b}) \cdot u_\alpha = 0$  ce qui fournit les paramètres solutions du système linéaire :

$$G \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \cdot (b - a) \\ u_2 \cdot (b - a) \end{pmatrix}$$

où la matrice  $G$  dite de Gramm est

$$G = \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & u_1 \cdot u_2 \\ u_2 \cdot u_1 & u_2 \cdot u_2 \end{pmatrix}$$

**Remarque 7** Dans le cas où  $u_1, u_2$  est orthonormée,  $G$  est la matrice identité et la formule revient à calculer les composantes sur ces deux vecteurs.

**Deuxième méthode,** avec le vecteur normal, On utilise

$$(\vec{b} - \tilde{P}_{\mathcal{P}_a} \vec{b}) = \beta \nu$$

et  $\tilde{P}_{\mathcal{P}_a} \vec{b} \in \mathcal{P}_a$  ou  $((\tilde{P}_{\mathcal{P}_a} \vec{b}) - a) \cdot \nu = 0$

$$\tilde{P}_{\mathcal{P}_a} \vec{b} = b - ((b - a) \cdot \nu) \nu$$

**Vecteur normal à 2 vecteurs : méthode de la projection** En dehors des méthodes indiquées ci dessus, on peut aussi prendre un vecteur quelconque  $\vec{w}$  non situé dans le plan de ces 2 vecteurs  $u_1, u_2$ , le projeter sur le plan vectoriel engendré par ces 2 vecteurs ; un vecteur orthogonal est alors :

$$\vec{v} = \vec{w} - \tilde{P}_{[\vec{u}_1, \vec{u}_2]} \vec{w} \quad (4.29)$$

**Remarque 8** On a bien sûr

$$\tilde{P}_{\mathcal{P}_a} \vec{b} = a + P_{\mathcal{P}_o}(b - a)$$

**Exercice 4.18** Un exemple avec des données numériques et dessin.

**Exercice 4.19** Soit  $\vec{v}^1 \vec{v}^2$  avec  $\vec{v}^1 = {}^t [1, 0, \epsilon]$   $\vec{v}^2 = [0, 1, \epsilon]$ .

1. Pour  $\epsilon = 0$ , équation paramétrique et cartésienne du plan vectoriel  $\Pi_0$  engendré par  $\vec{v}^1 \vec{v}^2$ .
2. Pour  $\epsilon = 0$ , équation paramétrique et cartésienne de la droite engendrée par le vecteur normal à ces 2 vecteurs.
3. Calculer la projection sur ce plan  $\Pi_0$  du point  $b = [b_1, b_2, b_3]$
4. Pour  $\epsilon \neq 0$ , équation paramétrique et cartésienne du plan vectoriel  $\Pi_\epsilon$  engendré par  $\vec{v}^1 \vec{v}^2$ .
5. Pour  $\epsilon \neq 0$ , équation paramétrique et cartésienne de la droite engendré par le vecteur normal à ces 2 vecteurs.
6. Calculer la projection sur ce plan  $\Pi_\epsilon$  du point  $b = [b_1, b_2, b_3]$
7. Calculer un développement limité au premier ordre de la projection sur le plan  $\Pi_\epsilon$  pour  $\epsilon \rightarrow 0$ . Interprétation.

### 4.3.4 Projection sur une droite

Avec les mêmes idées, on peut utiliser

$$(b - \tilde{P}_{D_a} b) \cdot \vec{u} = 0$$

et

$$\tilde{P}_{D_a} b = a + \lambda \vec{u}$$

on trouve :

$$\tilde{P}_{D_a} b = a + \alpha \vec{u} = a + \frac{\vec{u} \cdot (\vec{ab})}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$$

## 4.4 Droite et plan dans un espace de grande dimension

### 4.4.1 Vecteurs et matrices

Pour la suite en grande dimension, nous allons utiliser des matrices. C'est ainsi que le produit scalaire de 2 vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est noté

$${}^t \vec{v} \vec{u} \quad (4.30)$$

Nous notons  $V$ , une matrice à  $m$  lignes et 2 colonnes ; nous utiliserons souvent sa décomposition en vecteurs colonnes (notez la position de l'indice de colonne dans ce cours)

$$\vec{V} = [v^1 v^2] \quad (4.31)$$

$$[{}^t V V]_i^j = {}^t v^i v^j \quad (4.32)$$

Une combinaison linéaire de vecteurs s'écrit :

$$\sum_i \alpha_i v^i = V[\alpha] \quad \text{avec } [\alpha] = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

On se place dans un espace affine associé à un espace vectoriel de dimension  $N$  strictement plus grand que 3. Quand on parle de vecteur **normal**, l'espace est supposé **euclidien**. On utilise des méthodes adaptées à la grande dimension.

Dans tout ce paragraphe,  $O$  est un point fixé choisi comme origine dans l'espace affine.

### 4.4.2 Plan dans un espace de dimension $N > 3$

#### 1. Plan : vecteurs directeurs et normaux.

	2 vecteurs directeurs	N-2 vect. normaux
plan vectoriel $\mathcal{P}_0$	$b_1, b_2 \in \mathcal{P}_0, \vec{u}_i = \vec{ob}_i, i = 1, 2$	$\vec{v}_j \cdot \vec{u}_i = 0, j = 1, \dots, N-2, i = 1, 2$
plan affine $\mathcal{P}_a$	$a, b_1, b_2 \in \mathcal{P}_a, \vec{u}_i = \vec{ab}_i, i = 1, 2$	"

Les vecteurs  $u_i$  peuvent

être orthonormalisés.

#### 2. equation paramétrique et implicite

	eq. param	eq. cartésienne (implicite)
plan vect $\mathcal{P}_0$	$\vec{om} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2$	$\vec{om} \cdot \vec{v}_j = 0, j = 1, \dots, N-2$
plan affine $\mathcal{P}_a$	$m = a + \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2$	$\vec{am} \cdot \vec{v}_j = 0, j = 1, \dots, N-2$

**Remarque 9** Avec un repère cartésien, on a  $N$  équations paramétriques avec 2 paramètres ; mais  $N - 2$  équations cartésiennes pour  $N$  inconnues.



### 4.4.3 Droite dans un espace de dimension $N > 3$

1. Vecteur directeur et vecteurs normaux.

	vecteur directeur	vect. dir. unitaire	N-1 vect.normaux
droite vectorielle $D_0$	$b \in D_0, \vec{u} = \vec{ob}$	$\vec{\tau} = \frac{\vec{u}}{\ \vec{u}\ }$	$\vec{v}_i \cdot \tau = 0, i = 1, \dots, N-1$
droite affine $D_a$	$a, b \in D_a, \vec{u} = \vec{ab}$	“	“

2. Equation paramétrique et implicite.

	eq. param	eq. cartésienne (implicite)
dte vect $D_0$	$\vec{om} = \lambda \vec{u}$	$\vec{om} \cdot \vec{v}_i = 0, i = 1, \dots, N-1$
dte affine $D_a$	$m = a + \lambda \vec{u}$	$\vec{am} \cdot \vec{v}_i = 0, i = 1, \dots, N-1$

Les vecteurs  $v_i, i = 1, 2$  peuvent être orthonormalisés.

**Remarque 10** Avec un repère cartésien, on a  $N$  équations paramétriques avec 1 paramètre ; mais  $N-1$  équations cartésiennes pour  $N$  inconnues.

### 4.4.4 Passage d'équation cartésienne à paramétrique et réciproquement

#### Equations cartésiennes données

Considérons par exemple, le cas  $N = 5$ , les équations cartésiennes

$$\vec{am} \cdot \vec{v}_i = 0, i = 1, 3$$

; pour simplifier considérons une base  $e_i, i = 1, \dots, 5$  et supposons (quite à permuter les colonnes) que la matrice  $3 \times 3$

$${}^t v' = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix}$$

soit inversible ; notons :

$${}^t v'' = \begin{pmatrix} v_{14} & v_{15} \\ v_{24} & v_{25} \\ v_{34} & v_{35} \end{pmatrix}$$

notons  $x'$  (resp  $x''$ ) les 3 premières (resp. les 2 dernières) composantes de  $\vec{om}$  alors on a une équation *paramétrique* en inversant cette matrice  $v'$  dans le système suivant :

$${}^t v' x' = -{}^t v'' x'' + {}^t v a$$

avec les 2 paramètres  $x_4, x_5$ .

#### Equations paramétriques données

Réciproquement, considérons les équations paramétriques  $m = a + \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2$  ; pour obtenir des équations cartésiennes, il convient d'éliminer  $\lambda_1, \lambda_2$  ; pour cela, nous pouvons faire appel à la théorie des systèmes linéaires : à quelle condition, peut-on déterminer  $\lambda_1, \lambda_2$  solution du système linéaire

$$\vec{u}_1 \lambda_1 + \vec{u}_2 \lambda_2 = \vec{am}$$

Supposons pour simplifier (quite à permuter les lignes) , que la matrice  $2 \times 2$

$$u' = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$$

est inversible ; le système linéaire a une solution si et seulement si **les matrices bordantes** sont non inversibles ; ce qui peut s'exprimer avec les déterminants de ces matrices bordantes sont nuls. Ceci nous donne les 3 équations :

$$\det \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & m_1 - a_1 \\ u_{21} & u_{22} & m_2 - a_2 \\ u_{31} & u_{32} & m_3 - a_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & m_1 - a_1 \\ u_{21} & u_{22} & m_2 - a_2 \\ u_{41} & u_{42} & m_4 - a_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & m_1 - a_1 \\ u_{21} & u_{22} & m_2 - a_2 \\ u_{51} & u_{52} & m_5 - a_5 \end{pmatrix} = 0$$

**Remarque 11** Notons que cela revient à vérifier que les projections de  $m - a$  sur tous les sous espaces vectoriels de dimension 3 sont dans les sous espaces vectoriels engendrés par les projections de  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  sur ces mêmes sous espaces tridimensionnels. Cela revient à vérifier que ces projections tridimensionnelles sont orthogonales aux produits vectoriels des projections tridimensionnelles de  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ .

#### 4.4.5 Projections orthogonales

Pour des raisons pratiques, le produit scalaire utilisé n'est pas toujours le produit usuel (ie les bases ne sont pas toujours orthonormées) ; nous utiliserons une matrice  $Q$  définie positive :

$${}^t v Q v \text{ strictement positif} \quad (4.34)$$

elle sera souvent diagonale à coefficients strictement positifs.

**Proposition 4.1** Soit  $M_0$  un sous espace vectoriel de dimension  $d$  de  $\mathbb{R}^m$  défini par un système libre de vecteurs :  $\vec{v}^1, \vec{v}^2, \dots, \vec{v}^d$  ; soit  $x \in \mathbb{R}^m$  ; soit  $V = [\vec{v}^i]$  ; la projection  $Q$  orthogonale de  $x$  sur  $M_0$  est donné par :

$$P_{M_0} x = \sum_i \alpha_i \vec{v}^i \text{ avec} \quad (4.35)$$

$$G[\alpha] = {}^t V Q x \text{ où } G = {}^t V Q V \text{ ou encore :} \quad (4.36)$$

$$P_{M_0} x = V G^{-1} {}^t V Q x \quad (4.37)$$

**Démonstration** Nous nous limitons au seul cas pratique :  $d=2$ . Notons :

$$m = P_{M_0} x$$

Il suffit d'écrire que la projection  $m$  se trouve dans le plan et satisfait : le vecteur  $\overrightarrow{x\bar{m}}$  est orthogonal aux 2 vecteurs  $\vec{v}^1, \vec{v}^2$ .

$${}^t V Q m = {}^t V Q x \text{ avec } m = V[\alpha] \quad (4.38)$$

D'où le résultat.

**Proposition 4.2** La projection affine  $Q$ -orthogonale sur le sous espace affine  $M_a$  passant par  $a$  et parallèle à  $M_0$  est donné par :

$$\tilde{P}_{M_a} \vec{x} = \vec{a} + P_{M_0}(\vec{x} - \vec{a}) \quad (4.39)$$

$$\tilde{P}_{M_a} \vec{x} = \vec{a} - P_{M_0} \vec{a} + P_{M_0} \vec{x} \quad (4.40)$$

ou en définissant le **pivot**

$$\vec{p} = \vec{a} - P_{M_0} \vec{a} \quad (4.41)$$

$$\tilde{P}_{M_a} \vec{x} = \vec{p} + P_{M_0} \vec{x} \quad (4.42)$$

**Démonstration** La différence avec la projection sur un plan vectoriel :  $\tilde{P}_{M_a} \vec{x} = m$  se trouve dans le plan affine ssi  $m - a$  se trouve dans le plan vectoriel parallèle; et l'on a encore le vecteur  $\vec{x}\vec{m}$  est orthogonal aux 2 vecteurs  $v^1 v^2$ .

$${}^t V Q m = {}^t V Q x \quad \text{avec } m - a = V[\alpha] \quad \text{ou} \quad (4.43)$$

$$m - a = P_{M_0}(\vec{x} - \vec{a}) \quad (4.44)$$

**Proposition 4.3** La projection affine  $Q$ -orthogonale n'est pas une application linéaire mais c'est une application affine : elle conserve le barycentre (voir exercice).

**Exercice 4.20** 1. Démontrer que la projection affine  $Q$ -orthogonale conserve le barycentre.

2. Pour un nuage de points du plan, dessiner (avec scilab) : le barycentre ainsi que les projections sur une droite avec le barycentre des projections.

**Proposition 4.4** Soit  $M$  et  $M^\perp$  deux sous espaces vectoriels orthogonaux, alors on a

$$\vec{x} = \overrightarrow{P}_M \vec{x} + \overrightarrow{P}_{M^\perp} \vec{x} \quad (4.45)$$

$$\vec{x} = \vec{a} + \overrightarrow{P}_{M_a} \vec{x} + \overrightarrow{P}_{M_a^\perp} \vec{x} \quad (4.46)$$

$$(4.47)$$

**Exercice 4.21** Interpréter la proposition ci dessus dans le cas où  $M_0$  est // à des axes de coordonnées.

## Chapitre 5

# Notations d'algèbre linéaire

L'analyse de données utilise abondamment de l'algèbre linéaire et de la géométrie affine euclidienne. Dans le polycopié ( dû à J.P. Labrousse), les matrices sont notées par une majuscule et les coefficients par la minuscule correspondante :

$$A \quad \text{de coefficients } a_j^i \text{ parfois noté } [A]_j^i \quad (5.1)$$

avec  $i$  indice de colonne et  $j$  indice de ligne. Bien distinguer de la notation  $A_{ij}$  où  $i$  est indice de ligne et  $j$  de colonne. Le produit de 2 matrices se note :

$$[AB]_j^i = \sum_{k=1}^{k=m} a_j^k b_k^i \quad (5.2)$$

Attention en analyse de données, on utilise beaucoup de matrices rectangulaires :  $A \in L(m, n)$  à  $m$  lignes et  $n$  colonnes. On utilise aussi la décomposition en blocs et surtout en colonnes ou en lignes :

$$A = [\vec{a}^1, \vec{a}^2, \dots, \vec{a}^i, \dots, \vec{a}^n] \quad (5.3)$$

que je note souvent :

$$A = [\underline{a}^1, \underline{a}^2, \dots, \underline{a}^i, \dots, \underline{a}^n] \quad (5.4)$$

En ligne :

$$\begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \dots \\ \underline{a}_j \\ \dots \\ \underline{a}_m \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Cela donne une écriture du produit matriciel avec un produit scalaire :

$$[AB]_j^i = \langle \underline{a}_j, \underline{b}^i \rangle \quad (5.6)$$

Pour tout produit de matrices rectangulaires, dessiner le schéma :

$$\boxed{A} \quad \boxed{B} = \boxed{AB}$$

Transposition, nous utilisons la notation française  ${}^tA$  à comparer avec une autre notation plutt anglaise :  $A^T$ .

# Chapitre 6

## Inertie d'un système

### 6.1 Définition, propriétés

A partir de ce chapitre

**Notation 1** :  $p^j \in \mathbb{R}, p^j > 0, \sum_{j=1}^n p^j = 1$  et  $\underline{\underline{P}}$  matrice diagonale de coefficients diagonaux  $p^j$

La dispersion des points par rapport à un sous espace affine peut être mesurée par l'inertie; ce qui généralise l'inertie par rapport à un axe utilisée dans la dynamique d'un solide rigide en rotation autour d'un axe fixe.

**Définition 6.1** Avec les notations  $\underline{\underline{A}} = [\underline{a}^1 \dots \underline{a}^n]$  où  $\underline{a}^j \in \mathbb{R}^m$ ;  $M$  un sous espace vectoriel de dimension  $d$  de  $\mathbb{R}^m$ , posons  $M_{\underline{a}} = \underline{a} + M$  (sous espace affine passant par  $\underline{a}$  et // à  $M$ ); on appelle inertie de  $\underline{\underline{A}}$  par rapport à  $M_{\underline{a}}$

$$I_{M_{\underline{a}}}(\underline{\underline{A}}) = \sum_{j=1}^n p^j \|\underline{a}^j - \tilde{P}_{M_{\underline{a}}} \underline{a}^j\|_{\underline{\underline{Q}}}^2 \quad (6.1)$$

en particulier, on peut considérer l'inertie par rapport à un sous espace vectoriel :

$$I_M(\underline{\underline{A}}) = \sum_{i=1}^n p^j \|\underline{a}^j - \underline{\underline{P}}_{M_{\underline{a}}} \underline{a}^j\|_{\underline{\underline{Q}}}^2 \quad (6.2)$$

**Remarque 12** L'inertie par rapport à un sous-espace affine n'est autre que la somme des carrés des distances des points  $\underline{a}^j$  au sous espace affine considéré.

**Exercice 6.1** Calculer l'inertie de 2 points  $\underline{a}^1, \underline{a}^2$  du plan par rapport à une droite. Discuter suivant la position de la droite par rapport au centre de gravité et par rapport à son angle avec la droite défini par les 2 points  $\underline{a}^1, \underline{a}^2$ .

**Proposition 6.1** (Huygens) Soit le barycentre  $g$  des points  $\underline{a}^j$  affectés des poids  $p^j$ ,  $g = \sum_{i=1}^n p^j \underline{a}_i$  on a :

$$I_{M_{\underline{a}}}(\underline{\underline{A}}) = I_{M_g}(\underline{\underline{A}}) + d^2(g, M_{\underline{a}}) = I_{M_g}(\underline{\underline{A}}) + d^2(\underline{a}, M_g)$$

**Remarque 13**

$$d^2(g, M_{\underline{a}}) = I_{M_{\underline{a}}}(g); \quad d^2(\underline{a}, M_g) = I_{M_g}(\underline{a})$$

**Démonstration** Remarquons :

$$\tilde{P}_{M_a} \underline{a}^j = \underline{a} + P_M(\underline{a}^j - \underline{a}) \quad (6.3)$$

$$\tilde{P}_{M_a} \underline{g} = \underline{a} + P_M(\underline{g} - \underline{a}) \quad (6.4)$$

$$\tilde{P}_{M_g} \underline{a}^j = \underline{g} + P_M(\underline{a}^j - \underline{g}) \quad (6.5)$$

$$\underline{a}^j - \tilde{P}_{M_a} \underline{a}^j = \underline{a}^j - \tilde{P}_{M_g} \underline{a}^j + \underline{g} - \tilde{P}_{M_a} \underline{g} \quad (6.6)$$

L'utilisation de la conservation du barycentre par projection (proposition 4.3) va donner la première égalité :

$$\sum_{j=1}^n p^j \tilde{P}_{M_g} \underline{a}^j = \tilde{P}_{M_g} \left( \sum_{j=1}^n p^j \underline{a}^j \right) = \tilde{P}_{M_g} \underline{g} = \underline{g} \text{ ce qui fournit} \quad (6.7)$$

$$\sum_{j=1}^n p^j \|\underline{a}^j - \tilde{P}_{M_a} \underline{a}^j\|_{\underline{Q}}^2 = \quad (6.8)$$

$$\sum_{j=1}^n p^j \|\underline{a}^j - \tilde{P}_{M_g} \underline{a}^j\|_{\underline{Q}}^2 + \sum_{j=1}^n p^j \|\underline{g} - \tilde{P}_{M_a} \underline{g}\|_{\underline{Q}}^2 + 2 \sum_{j=1}^n p^j (\underline{a}^j - \tilde{P}_{M_g} \underline{a}^j) \cdot (\underline{g} - \tilde{P}_{M_a} \underline{g}) \quad (6.9)$$

et le double produit est nul avec l'égalité 6.7 Enfin comme  $\underline{g} - \tilde{P}_{M_a} \underline{g} = -(a - \tilde{P}_{M_g} \underline{a})$ , on a la dernière égalité de la proposition.

**Définition 6.2** Il est commode d'introduire  $d^j = a^j - g$  et  $\underline{D} = \underline{A} - [g \dots g]$

**Proposition 6.2**

$$I_{M_{\underline{a}}}(\underline{A}) = I_M(\underline{D}) \quad (6.10)$$

$$I_{\{0\}}(\underline{D}) = I_M(\underline{D}) + I_{M^\perp}(\underline{D}) \quad \text{ou} \quad (6.11)$$

$$I_{\{g\}}(\underline{A}) = I_{M_g}(\underline{A}) + I_{M_g^\perp}(\underline{A}) \quad \text{avec} \quad (6.12)$$

$$I_{M^\perp}(\underline{D}) = \sum_{j=1}^n p^j \|\underline{P}_{M^\perp} d^j\|_{\underline{Q}}^2 \quad (6.13)$$

le théorème de Huygens peut encore s'écrire :

$$I_{M_{\underline{a}}}(\underline{A}) = I_M(\underline{D}) + d^2(g, M_a) \quad (6.14)$$

**Démonstration** Utiliser la formule  $\tilde{P}_{M_a} \underline{x} = \underline{a} + P_{M_0}(\underline{x} - \underline{a})$ , et  $\underline{a}^j - \tilde{P}_{M_g} \underline{a}^j = \underline{d}^j - \underline{P}_{M^\perp} \underline{d}^j$  le résultat s'en déduit.

**Proposition 6.3** Soit  $\underline{V} = [v^1 \dots v^d]$  une base  $\underline{Q}$ -orthonormée de  $M$ , alors :  $I_{M^\perp}(\underline{D}) = \text{tr}({}^t \underline{V} \underline{Q} \underline{D} \underline{P} {}^t \underline{D} \underline{Q} \underline{V})$

La démonstration repose sur les lemmes :

**Lemme 1**

$$\text{tr}(\underline{h} {}^t \underline{k}^l) = {}^t \underline{h} \underline{k} \quad (\text{attention à la position des transposées!}) \quad (6.15)$$

$$\text{tr}(\underline{h} {}^t \underline{k}) = \sum_l {}^t \underline{h}^l \underline{k}^l \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n p^j {}^t \underline{x}^j \underline{x}^j = \text{tr}(\underline{x} \underline{P} {}^t \underline{x}) \quad (6.16)$$

d'où

$$\sum_j p^j {}^t(\underline{P}_M \underline{d}^j) Q (\underline{P}_M \underline{d}^j) = \quad (6.17)$$

$$\sum_j p^j {}^t d^j Q V {}^t V Q V {}^t V Q d^j = \sum_j p^j {}^t d^j Q V {}^t V Q d^j = \quad (6.18)$$

$$\text{tr}({}^t \underline{V} \underline{Q} \underline{D} \underline{P} {}^t \underline{D} \underline{Q} \underline{V}) \quad (6.19)$$

**Remarque 14**

$$[\underline{D} \underline{P} {}^t \underline{D}]_j^k = \sum_i d_j^i p^i d_k^i = \text{cov}(a_j, a_k) \quad (6.20)$$

où  $\text{cov}(a_j, a_k)$  est la covariance empirique des caractères  $a_j$  et  $a_k$  pondérés par les poids  $p^i$ .

Pour démontrer la proposition ci-dessous, nous aurons besoin de lemmes.

**Lemme 2** Si  $K$  est une matrice symétrique,  $Q$  une matrice symétrique définie positive, alors

1. Soit  $u^i$  les vecteurs propres de  $\sqrt{Q} K \sqrt{Q}$ ; ces vecteurs propres sont orthonormés :  ${}^t u^i u^k = 0$  pour  $k \neq i$ .
2. Soit  $u^i = \sqrt{Q^{-1}} u^i$  ce sont les vecteurs propres

$$K Q u^i = \lambda_i u^i$$

et ils sont  $Q$  orthogonaux :  ${}^t u^k Q u^i = 0$  pour  $k \neq i$

**Remarque 15** Pour une éventuelle valeur propre multiple, on peut (théoriquement) trouver une base orthogonale du sous espace propre; pour de grandes matrices, dans la pratique numérique cela n'est pas toujours facile.

## 6.2 Maximum, minimum de l'inertie

**Proposition 6.4** Soit  $M$  un s.e.v. de  $\mathbb{R}^m$  de dimension  $d$ , alors l'application

$$M \longrightarrow I_{M^\perp}(\underline{D}) \quad (6.21)$$

atteint son maximum lorsque  $M$  est engendré par les  $d$  vecteurs propres de  $\underline{D} \underline{P} {}^t \underline{D} \underline{Q}$  associés aux  $d$  plus grandes valeurs propres  $\lambda_1 \dots \lambda_d$  et ce maximum est égal à

$$I_{M^\perp}(\underline{D}) = \sum_{i=1}^d \lambda_i \quad (6.22)$$

En effet :

$$I_{M^\perp}(\underline{D}) = \sum_{i=1}^d {}^t \underline{v}^i Q D P {}^t D Q \underline{v}^i \quad (6.23)$$

Une propriété due à Lord Rayleigh dit que pour une matrice symétrique  $K$ , on a :

$${}^t v K v \leq {}^t u^1 K u^1 = \lambda_1$$



parmi les  ${}^t v v = 1$  et avec  $u^1$  vecteur propre normalisé associé à la plus grande valeur propre  $\lambda_1$ . Nous allons adapter cette idée. Nous nous limitons pour simplifier au cas  $d = 2$ , et posons pour une base  $Q$  orthonormée :

$$[v^1, v^2] = [u^1, \dots, u^m][y^1, y^2] \text{ avec } y^1, y^2 \in \mathbf{R}^m \text{ d'où} \quad (6.24)$$

$$DP {}^t DQ[v^1, v^2] = [\lambda_1 u^1, \dots, \lambda_m u^m][y^1, y^2] \quad (6.25)$$

$$\begin{bmatrix} {}^t v^1 \\ {}^t v^2 \end{bmatrix} QDP {}^t DQ[v^1, v^2] = \begin{bmatrix} {}^t y^1 \\ {}^t y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^t u^1 \\ \vdots \\ {}^t u^m \end{bmatrix} [\lambda_1 Q u^1, \dots, \lambda_m Q u^m][y^1, y^2] = \quad (6.26)$$

$$\begin{bmatrix} {}^t y^1 \\ {}^t y^2 \end{bmatrix} \Lambda[y^1, y^2] = \sum_{k=1}^m \lambda_k (y_k^1)^2 + \sum_{k=1}^m \lambda_k (y_k^2)^2 \quad (6.27)$$

comme  $v^1, v^2$  sont  $Q$  orthonormés, on en déduit facilement que  $y^1, y^2$  sont orthonormés et que le maximum est atteint pour :

$$y^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad y^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

ceci permet de conclure que les  $v^i$  doivent être les vecteurs propres de  $\underline{\underline{DP}} {}^t \underline{\underline{DQ}}$ .

**Corollaire 1** *Sous les hypothèses de la proposition précédente*

$$M_{\underline{a}} \longrightarrow I_{M_{\underline{a}}}(\underline{A}) \quad (6.29)$$

atteint son minimum quand  $a = g$  et quand  $M$  est le sous espace propres associés aux  $d$  plus grandes valeurs propres  $\lambda_1 \dots \lambda_d$  de  $\underline{\underline{DP}} {}^t \underline{\underline{DQ}}$ ; ce minimum est égal à la somme des  $m - d$  plus petites valeurs propres de  $\underline{\underline{DP}} {}^t \underline{\underline{DQ}}$  :

$$I_{M_{\underline{a}}}(\underline{A}) = \sum_{i=d+1}^m \lambda_i \quad (6.30)$$

## Chapitre 7

# Analyse en composantes principales (A.C.P.)

### 7.1 Introduction

L'objet d'étude est un tableau  $A$  dont chaque colonne  $A^j$  correspond à un *individu* (au sens de la statistique descriptive) et la ligne  $A_i$  un *caractère*; pour se faire une idée des ressemblances entre les individus ou entre les caractères, on va projeter ces individus sur un plan affine (ou un sous-espace de plus grande dimension  $d$ ); ce plan est choisi de telle façon que ces projections soient assez proches du nuage d'individus  $A^j$ .

Une façon de rendre compte de cette proximité est l'inertie des colonnes de  $A$  par rapport à ce sous-espace affine. Nous sommes conduits en utilisant le corollaire 1 à projeter sur le sous-espace propre de dimension  $d$  associé aux  $d$  plus grandes valeurs propres de  $\underline{DP}^t \underline{DQ}$ .

### 7.2 Pratique de l'ACP

Soient  $n$  individus et  $m$  caractères rangés dans une matrice  $A$  ( $m$  lignes et  $n$  colonnes; des poids  $p^j > 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ ;  $\sum_{j=1}^n p^j = 1$  pour les colonnes (individus) et des poids  $q_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$  pour les lignes; pour réaliser une A.C.P. :

1. Calculer le barycentre  $\underline{g}$  des colonnes de  $A$ ;
2. Calculer la matrice centrée :  $D = A - [\underline{g} \dots \dots]$ ;
3. Calculer la matrice de covariance  $DP^t D$ , puis  $\sqrt{Q} DP^t D \sqrt{Q}$  et  $DP^t DQ$ ;
4. Calculer les  $d$  plus grandes valeurs propres  $\lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, d$  de  $\sqrt{Q} DP^t D \sqrt{Q}$  et les vecteurs propres orthonormés associés  $\underline{u}^k$ ,  $k = 1, \dots, d$ .
5. On peut en déduire l'inertie par rapport au sous-espace affine  $M_g$  passant par  $g$  et parallèle au sous-espace propre engendré par  $\underline{u}^k$  avec le corollaire 1.
6. En déduire les vecteurs propres  $Q$ -orthonormés  $\underline{u}^k = \sqrt{Q}^{-1} \underline{u}'^k$  de  $DP^t DQ$ ; posons  $U = [u^1, \dots, u^d]$ .
7. Projeter (pour le produit scalaire de matrice  $Q$ ) les individus sur le sous-espace affine  $M_g$  passant par  $g$  et parallèle au sous-espace propre engendré par  $\underline{u}^k$ .

Ceci revient à remplacer le tableau  $D$  par le tableau  $U^t U Q D$ .

Pour la **représentation graphique** on utilise le tableau à  $d$  lignes des composantes des projections dans la base de vecteurs propres :  ${}^t U Q D$  (**solution retenue**)

**Remarque 16** Attention les vecteurs propres  $\underline{u}^k, k = 1, \dots, d$  doivent être orthonormés ; de plus les vecteurs propres sont définis au signe près ; le dessin des projections obtenu pourra avoir 4 dispositions ; elles peuvent être obtenues à partir d'une d'elle par symétrie par rapport à chacun des 2 axes et d'autre part par rapport à l'origine.

## 7.3 Interprétation de l'ACP

### 7.3.1 Qualités de la représentation

Qualité globale de la représentation

$$q_g = \frac{I_{M_g}(\underline{A})}{I_g(\underline{A})} = \frac{\sum_1^d \lambda_j}{\sum_1^m \lambda_k} \quad (7.1)$$

on a  $0 \leq q_g \leq 1$ .

En effet, avec la proposition 6.2 :

$$I_{\{g\}}(\underline{A}) = I_{M_g}(\underline{A}) + I_{M_g^\perp}(\underline{A}) = I_M(\underline{D}) + I_{M^\perp}(\underline{D}).$$

D'autre part avec la proposition 6.4,

$$I_{M^\perp}(\underline{D}) = \sum_{i=1}^d \lambda_i \text{ et } I_M(\underline{D}) = \sum_{i=d+1}^m \lambda_i$$

$$I_g(\underline{A}) = I_0(\underline{D}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i$$

**En pratique,** on regarde souvent si la valeur propre  $\lambda_{d+1}$  est bien plus petite que la dernière valeur propre retenue  $\lambda_d$ .

#### Autres critères de qualité

On peut aussi considérer des critères de qualité relatifs à un individu donné.

### 7.3.2 Anciens et nouveaux caractères

Une fois que la représentation graphique des points sur le meilleur plan est obtenue, il reste à interpréter ce graphique, en particulier les 2 axes du graphique. Pour cela, on va d'abord calculer le cosinus entre les anciens et les nouveaux caractères : ce n'est autre que le coefficient de corrélation entre ces anciens et nouveaux caractères.

- Les anciens caractères sont les lignes de la matrice  $A$ , notés  $a_k$  ; cet ancien caractère centré autour de sa moyenne (la  $k$ ème composante  $g_k$  du barycentre) est la  $k$ ème ligne de la matrice centrée  $D = A - [g \dots g]$ , notée  $d_k$  ; en désignant par

$${}^t e_k = (0 \dots 1 \dots 0)$$

avec le 1 à la  $k$ ème colonne, on a  $d_k = {}^t e_k D$ .

- Les nouveaux caractères :

$$v_j = {}^t w^j Q D$$

; le cosinus de l'angle entre anciens et nouveaux caractères doit se calculer avec le produit scalaire défini par les poids  $p^i$  rangés dans la matrice diagonale  $P$  ; c'est encore le coefficient de corrélation entre l'ancien et le nouveau caractère :

$$\cos(\theta_{jk}) = \rho_{jk} = \frac{v_j P^t d_k}{\|v_j\|_P \|d_k\|_P} \quad (7.2)$$

Le coefficient de corrélation multiple  $R_{kjj'}$  :

$$R_{kjj'}^2 = \rho_{jk}^2 + \rho_{j'k}^2$$

; le théorème de Pythagore montre que ce coefficient est le cosinus de l'angle entre l'ancien caractère et le plan des nouveaux caractères; Plus ce nombre est proche de 1, plus l'ancien caractère  $d_k$  est bien expliqué par les 2 nouveaux caractères.

– Représentation graphique des anciens caractères : on représente les points

$$C_k = (\rho_{jk}, \rho_{j'k})$$

; ces points peuvent être calculés par (7.2) :

La proximité de certains de ces points avec l'axe 1 ou 2 permet d'interpréter ces axes à partir des anciens caractères. Notons que cette interprétation n'est pas de nature mathématique mais relève du savoir faire et de la connaissance de la situation.

# Chapitre 8

## Analyse factorielle des correspondances

### 8.1 Compléments d'algèbre linéaire

Nous utiliserons le lemme suivant avec les 2 matrices de covariance utilisés en A.F.C.

**Lemme 3** Soit  $H$  une matrice rectangulaire  $m \times n$  (pour fixer les idées :  $m \leq n$ ) et les matrices carrées :

$${}^X C = H {}^t H, \quad {}^Y C = {}^t H H;$$

(matrices symétriques!) soient leurs valeurs propres :  $0 \leq \lambda_m \leq \dots \leq \lambda_1$  et  $0 \leq \mu_n \leq \dots \leq \mu_1$  avec :

$${}^X C u^j = \lambda_j u^j, \quad {}^Y C v^k = \mu_k v^k$$

alors pour  $j = 1, \dots, m$ ,  $\lambda_j = \mu_j$  et pour  $k = m + 1, \dots, n$ ,  $\mu_k = 0$  et

$$v^k = \frac{{}^t H u^k}{\sqrt{\lambda_k}}$$

est un vecteur propre orthonormé de  ${}^Y C$ .

**Démonstration** On remarque d'abord que  ${}^X C$ ,  ${}^Y C$  sont positives ; leurs valeurs propres sont donc positives (réelles puisque symétriques). Pour simplifier, supposons que  $H$  soit de rang  $m$  ; on peut donc en extraire une sous matrice carrée  $H_m$  de rang  $m$  ; en partionant  ${}^Y C$  avec cette matrice, on voit facilement qu'elle est de rang  $m$  ; ses plus petites valeurs propres sont donc nulles. Le lien entre les vecteurs propres découle facilement de :  ${}^Y C {}^t H u^k = {}^t H H {}^t H u^k = {}^t H {}^X C u^k = \lambda_k {}^t H u^k$

### 8.2 Notations, définitions

Deux caractères  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  sur une population ;  $\mathcal{X}$  a  $n$  modalités et  $\mathcal{Y}$   $m$  modalités ; dans le tableau  $N$ , le coefficient  $N_j^i$  représente le nombre d'individus ayant la  $i^{eme}$  modalité de  $\mathcal{X}$  et la  $j^{eme}$  modalité de  $\mathcal{Y}$ .

$$N = \left| \begin{array}{ccc|ccc} N_1^1 & \dots N_1^i & \dots N_1^n & N_1 = \sum_{i=1}^n N_1^i & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ N_j^1 & \dots N_j^i & \dots N_j^n & N_j = \sum_{i=1}^n N_j^i & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ N_m^1 & \dots N_m^i & \dots N_m^n & N_m = \sum_{i=1}^n N_m^i & & \\ N^1 = \sum_{j=1}^m N_j^1 & N^i = \sum_{j=1}^m N_j^i & N^n = \sum_{j=1}^m N_j^n & \bar{N} = \sum_{i=1}^n N^i = \sum_{j=1}^m N_j & & \end{array} \right|$$

On désigne le tableau des profils des colonnes par  $X$  avec  $X_j^i = \frac{N_j^i}{N^i}$  et le tableau des profils des lignes  $Y$  par  $Y_j^i = \frac{N_j^i}{N_j}$ .

**L'AFC en pratique** consiste { a réaliser d'une part une analyse en composantes principales du tableau  $X$  avec les poids  ${}^X p^i = f^i$  et  ${}^X q_j = \frac{1}{f_j}$ . Avec les fréquences  $f^i = \frac{N^i}{N}$  et  $f_j = \frac{N_j}{N}$ .

On réalise d'autre part une ACP du tableau  $Y$  par lignes avec les poids  ${}^Y p^i = \frac{1}{f^i}$  et  ${}^Y q_j = f_j$ .

On représente sur le même dessin les projections des colonnes de  $X$  et les lignes de  $Y$  chacun sur son plan d'ACP.

### 8.3 Résultats

**Lemme 4** *Le barycentre des colonnes de  $X$  est  ${}^X g_j = \frac{N_j}{N} = f_j$*

*Le barycentre des lignes de  $Y$  est  ${}^Y g^i = \frac{N^i}{N} = f^i$*

**Proposition 8.1** *Les matrices de covariance*

$${}^X C = \sqrt{{}^X Q} {}^X D {}^X P {}^t X D \sqrt{{}^X Q} \quad (8.1)$$

$${}^Y C = \sqrt{{}^Y P} {}^t Y D {}^Y Q {}^Y D \sqrt{{}^Y P} \quad (8.2)$$

peuvent s'exprimer :

$${}^X C = H {}^t H \quad {}^Y C = {}^t H H \text{ avec} \quad (8.3)$$

$$H = \sqrt{{}^X Q} {}^X D \sqrt{{}^X P} = \sqrt{{}^Y Q} {}^Y D \sqrt{{}^Y P} \quad (8.4)$$

$$H_j^i = \frac{N_j^i}{\sqrt{N^i N_j}} - \frac{\sqrt{N_j} \sqrt{N^i}}{N} \quad (8.5)$$

**Corollaire 2** *Les vecteurs propres orthonormés  $w^j$  de  ${}^X C$  fournissent*

$$v^j = \frac{{}^t H w^k}{\sqrt{\lambda_k}}$$

*vecteurs propres orthonormés de  ${}^Y C$ .*

### 8.4 Interprétation

L'intérêt de l'AFC est de pouvoir interpréter la position d'un point colonne (resp. ligne) par rapport { a l'ensemble des points lignes (resp.colonnes) représentés sur le graphique ; cette interprétation donne une correspondance entre les modalités des 2 caractères  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$ . Une bonne interprétation demande une connaissance du sujet d'application.

## Chapitre 9

# Régression

## Chapitre 10

### Devoirs



**Contrôle analyse de données, licence MASS 2000-2001**

1. On considère la matrice :

$$S = \begin{pmatrix} 2.4 & 2. & 5. \\ 2. & 5.4 & 10. \\ 5. & 10. & 26.4 \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer avec scilab valeurs et vecteurs propres de A ; vérifier la main que les valeurs propres sont correctes ; avec scilab effectuer les vérifications qui s'imposent.
- (b) Calculer l'opérateur de projection sur le sous espace propre  $M$  associé aux deux plus petites valeurs propres ; (avec scilab)
- (c) Déterminer une base orthonormée de vecteurs propres ; (avec scilab).
- (d) Avec cette nouvelle base, recalculer l'opérateur de projection sur le sous espace  $M$  associé aux mêmes valeurs propres ; comparer les 2 résultats.
- (e) Fournir une équation du plan affine  $M_a$  passant par

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et parallèle  $M$ .

- (f) Trouver la projection sur  $M_a$  des points  $x^1$   $x^2$  de composantes :

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

avec scilab effectuer les vérifications qui s'imposent.

- (a) On considère les points dont les composantes sont dans la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 610 & 140 & 60 & 10 & 120 & 95 & 115 \\ 475 & 90 & 250 & 30 & 140 & 120 & 100 \\ 10 & 0 & 495 & 110 & 170 & 110 & 130 \\ 615 & 140 & 65 & 10 & 115 & 90 & 115 \\ 179 & 29 & 421 & 87 & 161 & 112 & 119 \end{pmatrix}$$

on prend les  $p_i$  tous égaux et les  $q_j = 1$  ; calculer le centre de gravité de ces points et la matrice de covariance associée.

- (b) Calculer ses 2 plus grandes valeurs propres et le sous espace propre associé.
- (c) Calculer l'inertie absorbée par  $M$ , sous espace propre associé aux 2 plus grandes valeurs propres.

**Controle analyse de donnes, licence MASS 2000-2001** Notes manuscrites et polycopi du cours autoriss.

1. Notre disquaire prend une classification plus fine des acheteurs et obtient le tableau de contingence :

$$S = \begin{pmatrix} & \textit{chanson} & \textit{rock} & \textit{classique} \\ \textit{j.f.} & 41 & 16 & 8 \\ \textit{j.h.} & 28 & 25 & 10. \\ \textit{f.} & 172 & 84 & 127 \\ \textit{h.} & 133 & 118 & 157 \\ \textit{v.f.} & 16 & 5 & 19 \\ \textit{v.h.} & 11 & 6 & 24 \end{pmatrix}$$

avec : j. pour les jeunes, v. pour les vieux, f. pour les femmes, h. pour les hommes.

- Raliser une analyse factorielle des correspondances sur ce tableau (on pourra rcuprer le programme `afc1.sce` dans mon rpertoire situ sur uranie /u/profs/br).
- Reporter sur votre feuille le dessin excut avec `scilab` ; y mettre les numros des points et leur signification (type d'acheteur et de musique).
- Donner une interprtation des corespondances constates ; comparer avec ce que le disquaire avait dj obtenu dans l'tude ralise en TD .
- Qualit globale de la representation.
- Interprtation des axes.
- Par rapport au programme utilis en TD, j'ai complt avec :

```

ulhuc=ul'*h'*uc;
for i=1:size(n,'c'),
    for j=1:size(n,'r'),
        if ulhuc(i,j) < 0 then
            ul(:,i)=-ul(:,i);
        end,
    end,
end,
[sl,kl]=sort(vpl);
ul2d=zeros(2,size(d,'c'));
for i=1:2
    ul2d(i,:)=ul(:,kl(i))*d
end

```

A quoi peut servir ce morceau de programme ? (la matrice  $h$  est celle appele  $H$  dans le polycopi).

- Donner 1 quation du plan passant par le centre de gravit de la matrice  $X$  des profils de colonnes et parallle aux 2 vecteurs propres associs aux 2 plus grandes valeurs propres de la matrice de covariance.
2. On reprend l'tude sur les occupations quotidiennes suivant l'tat civil.
- On considere le tableau de contingence ci-dessous. La population est amricaine dans les annes 1965/66.

$$A = \begin{pmatrix} & \textit{prof} & \textit{tran} & \textit{mena} & \textit{enfa} & \textit{cour} & \textit{toil} & \textit{repas} & \textit{somm} & \textit{tele} & \textit{lois} \\ \textit{ha} & 610 & 140 & 60 & 10 & 120 & 95 & 115 & 760 & 175 & 315 \\ \textit{fa} & 475 & 90 & 250 & 30 & 140 & 120 & 100 & 775 & 115 & 305 \\ \textit{fna} & 10 & 0 & 495 & 110 & 170 & 110 & 130 & 785 & 160 & 430 \\ \textit{hm} & 615 & 140 & 65 & 10 & 115 & 90 & 115 & 765 & 180 & 305 \\ \textit{fm} & 179 & 29 & 421 & 87 & 161 & 112 & 119 & 776 & 143 & 373 \\ \textit{hc} & 585 & 115 & 50 & 0 & 150 & 105 & 100 & 760 & 150 & 385 \\ \textit{fc} & 482 & 94 & 196 & 18 & 141 & 130 & 96 & 775 & 132 & 336 \end{pmatrix}$$

avec : h : homme, f :femme, a : actif, na : non actif, m : mari, c : clibataire ; prof : activit professionnelle,tran :transport, mena : travail mnager, enfa :s'occuper des enfants, cour : courses, toil : toilette, repas : consommation des repas, somm : sommeil, tele : tlvision, lois : loisirs autres que tl. Les nombres donnent le temps pass en centimes d'heure.

- i. Raliser une analyse factorielle des correspondances sur ce tableau (on pourra rcuprer le programme `afc.sce` dans mon rpertoire /br).
- ii. Reporter sur votre feuille le dessin excut avec `scilab` ; y mettre les numros des points et leur signification (type d'acheteur et de musique).
- iii. Donner une interprtation des correspondances constates.
- iv. Qualit globale de la reprsentation.
- v. Interprtation des axes.

**Contrôle analyse de données, licence MASS septembre 2001**

Notes manuscrites et polycopi du cours autorisés.

1. (a) On considère le plan  $M$  de  $\mathbb{R}^3$  engendré par les vecteurs  $v^1$   $v^2$  de composantes :

$$[v^1 \ v^2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculer la matrice de la projection orthogonale sur le plan  $M$ .

- (b) Donner une équation paramétrique du plan affine  $M_a$  parallèle au plan  $M$  passant par le point  $a = {}^t[1, 1, 1]$ .  
 (c) Calculer la projection du point  $a$  sur le plan vectoriel  $M$ .  
 (d) Calculer le pivot de  $M_a$ .  
 (e) Déterminer la projection de l'origine sur  $M_a$ .  
 (f) Calculer l'inertie de  $A = [a^1 \ a^2]$  par rapport à  $M_a$  avec les poids  $p^1 = p^2$  avec la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} rev/educ & non\ reponse & scol.obligat. & cap/bep & bepc & bac & superieur \\ non\ reponse & 54 & 134 & 70 & 51 & 65 & 66 \\ < 4000 & 5 & 66 & 29 & 15 & 14 & 17 \\ 4000 - 7000 & 16 & 155 & 127 & 53 & 82 & 48 \\ 7000 - 10000 & 7 & 75 & 107 & 41 & 74 & 102 \\ 10000 - 20000 & 3 & 30 & 62 & 29 & 80 & 147 \\ 20000 - 30000 & 0 & 6 & 4 & 1 & 4 & 24 \\ > 30000 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Cette matrice correspond aux effectifs lors d'une enquête effectuée sur les diplômes et revenus d'un échantillon de population. On a réalisé une *analyse factorielle des correspondances*. On a tracé le dessin ci-dessous dans le plan des 2 premiers vecteurs propres des matrices de covariance.

- (a) Indiquer brièvement de quelles matrices il s'agit ;  
 (b) Comment calculer ces matrices (calcul effectif non demandé) ;  
 (c) Comment calculer valeurs propres et vecteurs propres (calcul effectif non demandé) ;  
 (d) On a les correspondances suivantes entre les nombres représentés sur le graphique et leur signification pour l'enquête :

$$\begin{bmatrix} non\ reponse & scol.obligat. & cap/bep & bepc & bac & superieur \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} non\ reponse < 4000 & 4000 - 7000 & 7000 - 10000 & 10000 - 20000 & 20000 - 30000 & > 30000 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 \end{bmatrix}$$

Interpréter le premier axe obtenu sur le dessin ;

- (e) Quelles conclusions (sur les revenus et diplômes) relatives à l'enquête pouvez-vous tirer de l'analyse factorielle des correspondances ?

FIG. 10.1 – revenus et scolarité

## Contrôle continu : licence mass, analyse de données novembre 2001

Calculatrices interdites ; notes de cours, TD et photocopi distribu autoriss.  ${}^tD$  dsigne comme dans le poly la matrice transpose de  $D$ .

1. (a) En partant de la dfinition de l'inertie totale, montrer que l'on a bien la formule utilise en TD (avec  $P$  et  $Q$  des matrices diagonales coefficients strictement positifs) :

$$I_T(D) = Tr(\sqrt{Q} DP {}^tD\sqrt{Q}) = Tr(DP {}^tDQ) = Tr(P {}^tDQD) \quad (10.1)$$

- (b) Comment peut-on retrouver 10.1 avec la formule (0.28) du photocopi :

$$I_{M^\perp}(D) = Tr({}^tV\sqrt{Q}C\sqrt{Q}V) \quad (10.2)$$

2. On considere la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 6 & 1 & 11 & 5 & 3 & 2 & 9 & 7 & 8 & 10 & 4 \\ 2 & 6 & 5 & 3 & 4 & 1 & 8 & 9 & 7 & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

les lignes representent le classement de 11 tudians dans les matires suivantes : mathmatiques, conomie et anglais.

- (a) Dans une analyse en composantes principales du tableau  $A$  avec une matrice  $Q = Id$ , de quelle matrice calcule-t-on les valeurs et vecteurs propres ?
- (b) Comme tous les tudians ont le mme "poids", quelle matrice  $P$  suggerez vous ?
- (c) Donner les formules utiliser dans le logiciel **scilab** pour calculer cette matrice et ses valeurs propres et vecteurs propres ;
- (d) On trouve comme valeurs propres : 19.555122; 2.3283122; 8.1165657 quelle est la qualit globale de la representation ?
- (e) Indiquer les calculs effectuer et les formules utiliser dans le logiciel **scilab** pour obtenir la figure 10.2 dans le plan des vecteurs propres associs aux 2 plus grandes valeurs propres (le choix des 2 plus grandes valeurs propres est fait manuellement).
- (f) La figure 10.3 represente les coefficients de corrlation des anciens caractres avec les nouveaux caractres ; quelles formules utiliser pour obtenir les coordonnes de ces points ?
- (g) Interprter les nouveaux axes.
- (h) Le lendemain on dispose des classements en informatique :

$$A = [ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 1 \ 2 ]$$

On ralise une ACP et on obtient la projection de la figure 10.4 et les corrlations de la figure 10.5. Interprter les nouveaux axes.

- (i) on trouve comme valeurs propres : 19.557224; 1.9290897; 8.0815937; 10.432093; quelle est la qualit globale de la representation ?
- (j) Commenter la position des tudians avec 3 et 4 matires.
- (k) On ralise une nouvelle ACP dans laquelle on souhaite donner beaucoup d'importance au coefficient de l'informatique ; on prend une matrice  $Q$  avec  $Q_{ii} = 1 \ i = 1, 2, 3$  et  $Q_{44} = 9$ . On trouve la representation de la figure 10.6 pour les individus et de la figure 10.7 pour les caractres. Interprter les nouveaux axes.
- (l) on trouve comme valeurs propres : 90.340847; 19.552669; 1.9988868; 8.1075973; quelle est la qualit globale de la representation ?

FIG. 10.2 – classement avec 3 matires

FIG. 10.3 – corrlations pour 3 matires

FIG. 10.4 – classement avec 4 matires

FIG. 10.5 – corrlations avec 4 matires

FIG. 10.6 – classement avec 4 matires pondres : 1,1,1,9

FIG. 10.7 – classement avec 4 matires pondres : 1,1,1,9

**Examen analyse de donnes, lic. MASS 2001-2002.** Notes manuscrites et polycopi du cours autoriss ; calculs interdites ; soigner la presentation.

1. Soit  $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$  une variable explicative et  $\underline{a}^1 \in \mathbb{R}^m$  une variable explicative ; les poids  $q_j > 0$  vrifient :  $\sum_{j=1}^m q_j = 1$  et l'on note  $Q = \text{diag}(q_j)$

(a) Notons  $\text{cov}(\underline{y}, \underline{a}^1) = \langle \underline{y}, \underline{a}^1 \rangle_Q - \bar{y} \bar{a}^1$  avec le produit scalaire  $\langle \underline{y}, \underline{a}^1 \rangle_Q = \sum_{j=1}^m y_j q_j a_j^1$  et la moyenne  $\bar{y} = \langle \underline{y}, \underline{a}^0 \rangle_Q$  avec  ${}^t \underline{a}_0 = [1, \dots, 1]$  et idem pour les autres vecteurs considrs. Dmontrer que  $\text{cov}(\underline{y}, \underline{a}^1) = \langle \underline{y} - \bar{y} \underline{a}^0, \underline{a}^1 - \bar{a}^1 \underline{a}^0 \rangle_Q$

(b) Rappeler l'expression des 2 coefficients  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  de la droite des moindres carrs ( droite de rgression) :  $\underline{y}^* = \alpha_0 \underline{a}^0 + \alpha_1 \underline{a}^1$  avec :  ${}^t \underline{a}_0 = [1, \dots, 1]$  où l'on note  ${}^t$  la transpose d' une matrice ou d'un vecteur.

(c) En notant  $\text{var}(\underline{y}) = \text{cov}(\underline{y}, \underline{y})$ , en dduire que

$$\text{var}(\underline{y}) = \text{var}(\underline{y} - \underline{y}^*) + \text{var}(\underline{y}^*) + 2\text{cov}(\underline{y} - \underline{y}^*, \underline{y}^*) \quad (10.3)$$

(d) Montrer que  $\text{cov}(\underline{y} - \underline{y}^*, \underline{y}^*) = 0$

(e) Montrer que  $\text{var}(\underline{y}^*) = \frac{\text{cov}(\underline{a}^1, \underline{y})^2}{\text{var}(\underline{a}^1)}$

(f) En dduire :  $\text{var}(\underline{y}) = \text{var}(\underline{y} - \underline{y}^*) + \rho(\underline{a}^1, \underline{y})^2 \text{var}(\underline{y})$

(g) A l'aide de la formule prcdente donner une nouvelle justification du critre retenu en cours pour la qualit de la rgression.

(h) On considere le tableau des 2 variables : population totale (variable explicative) et population active (variable explicative) de quelques pays en 1970 :

pays	population	actifs
Etatsunis	204.8	78.62
Japon	103.5	50.94
Allemagne	61.5	26.7
Angleterre	55.8	24.7
France	50.7	20.41
Italie	54.4	18.77
Canada	21.4	7.87
Paysbas	13.0	4.56
Belgique	9.67	3.74

Dessiner main leve ces points sur un graphique avec la droite des moindres carrs

(i) On a  $\rho(\underline{a}^1, \underline{y}) = 0.988$  ; prciser la qualit de la rgression.

2. On considere la matrice suivante

$$N = \begin{bmatrix} 20 & 20 & 1 & 1 & 2 & 18 & 9 \\ 20 & 10 & 20 & 10 & 9 & 3 & 17 \\ 20 & 1 & 10 & 20 & 16 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Les lignes representent les notes obtenues par 7 tudants en mathmatiques, conomie, comptabilit ; chaque colonne fournit les 3 notes de chaque tudiant.

(a) Pourquoi ce tableau est-il susceptible d' une analyse factorielle des correspondances ?

(b) Calculer (ventuellement en partie) la matrice des profils des colonnes.

(c) Calculer (ventuellement en partie) la matrice des profils des lignes.

(d) Lors d' une analyse factorielle des correspondances, donner une quation paramtrique du plan sur lequel on projette (aucune valeur numrique n' est demande).

(e) Que dessine-t-on en pratique ?

(f) La figure 10.12 represente les projections des tudants et des 3 matires sur le plan prcis ci dessus. Donner un programme scilab pour le calcul de ces projections

(g) Interprter les correspondances releves sur le graphique.

FIG. 10.8 –

- (h) Interpréter les axes.
- 3. On considère le tableau des individus suivants :  $A = [-4, -3, -2, 1, 2, 3, 4, 5, 6]$  On souhaite répartir ces individus en 2 classes.
  - (a) En partant de la partition  $\Pi_1 = \{C_1^1, C_1^2\}$  avec  $C_1^1 = [-4, 2, 3, 4]$  et  $C_1^2 = [-3, -2, 1, 5, 6]$  effectuer une première itération de la méthode des centres dynamiques.
  - (b) Effectuer une deuxième itération.
  - (c) Évaluer la qualité de la partition



**Examen analyse de donnees, lic. MASS 2001-2002**, septembre 2002.

Notes manuscrites et polycopi du cours autoriss ; calculettes interdites ; soigner la presentation et la rdaction.

1. On considere le tableau des individus suivants :  $A = [-4, -3, -2, 1, 2, 3, 4, 5, 6]$   
On souhaite rpartir ces individus en 2 classes.
  - (a) En partant de la partition  $\Pi_1 = \{C_1^1, C_1^2\}$  avec  $C_1^1 = [-4, 2, 3, 4]$  et  $C_1^2 = [-3, -2, 1, 5, 6]$  effectuer une premiere itration de la mthode des nues dynamiques.
  - (b) Effectuer une deuxime itration.
  - (c) Evaluer la qualite de la partition
2. (a) On considere le plan  $M$  de  $\mathbb{R}^2$  engendr par les vecteurs  $v^1$   $v^2$  de composantes :

$$[v^1 \ v^2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculer la matrice de la projection orthogonale sur le plan  $M$ .

- (b) Donner une quation paramtrique du plan affine  $M_a$  parallle au plan  $M$  passant par le point  $a = {}^t[1, 1, 1]$ .
- (c) Calculer la projection du point  $a$  sur le plan vectoriel  $M$ .
- (d) Calculer le pivot de  $M_a$ .
- (e) Dterminer la projection de l'origine sur  $M_a$ .
- (f) Calculer l'inertie de  $A = [a^1 \ a^2]$  par rapport  $M_a$  avec les poids  $p^1 = p^2$  avec la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. On considere la matrice suivante

$$N = \begin{bmatrix} 20 & 20 & 1 & 1 & 2 & 18 & 9 \\ 20 & 10 & 20 & 10 & 9 & 3 & 17 \\ 20 & 1 & 10 & 20 & 16 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Les lignes representent les notes obtenues par 7 tudians en mathmatiques, conomie, comptabilit ; chaque colonne fournit les 3 notes de chaque tudiant.

- (a) Pourquoi ce tableau est-il susceptible d' une analyse factorielle des correspondances ?
- (b) Calculer (ventuellement en partie) la matrice des profils des colonnes.
- (c) Calculer (ventuellement en partie) la matrice des profils des lignes.
- (d) Lors d' une analyse factorielle des correspondances, donner une quation paramtrique du plan sur lequel on projette (aucune valeur numrique n' est demande).
- (e) Que dessine-t-on en pratique ?
- (f) La figure 10.12 represente les projections des tudians et des 3 matires sur le plan precis ci dessus. Donner un programme scilab pour le calcul de ces projections
- (g) Interprter les correspondances releves sur le graphique.
- (h) Interprter les axes.

FIG. 10.9 –

**Contrôle continu : licence mass, analyse de données novembre 2002**

*Calculatrices interdites ; notes de cours, TD et polycopi distribu autoriss.*

${}^tD$  dsigne comme dans le poly la matrice transpose de  $\underline{D}$ .

1. (a) On considere 2 vecteurs  $\underline{v}^1, \underline{v}^2$  de  $\mathbb{R}^m$  ; on note  $\underline{V} = [\underline{v}^1 \ \underline{v}^2]$  et soit  $\underline{Q}$  une matrice symtrique non ncessairement diagonale valeurs propres strictement positives.

Montrer que

$$\forall w \in \mathbb{R}^m \quad {}^t w \underline{Q} w \geq \alpha {}^t w w \quad (10.4)$$

avec  $\alpha > 0$  que l'on explicitera avec les valeurs propres de  $\underline{Q}$ .

- (b) Soit  $\underline{G} = {}^t \underline{V} \underline{Q} \underline{V}$  ; quelles sont les dimensions de  $\underline{G}$  ?  
 (c) Peut-on multiplier  $\underline{G}$  et  ${}^t \underline{V}$  ?  
 (d) On considere la matrice :  $\underline{V}^* = \underline{V} \underline{G}^{-1}$  ; quelles sont ses dimensions ?  
 (e) Soit :

$$\underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.5)$$

Avec  $Q = Id$ , Calculer  $G, G^{-1}, V^*$  ; dessiner  $\underline{v}^1, \underline{v}^2, \underline{v}^{1*}, \underline{v}^{2*}$

- (f) On reprend pour la suite  $\underline{v}^1, \underline{v}^2$  quelconques ; on note  $V^* = [\underline{v}^{1*}, \underline{v}^{2*}]$  . Montrer les identits  $G^{-1} = {}^t V^* Q V^*$  et  $G {}^t V^* = {}^t V$  .  
 (g) Explicier les coefficients de  ${}^t \underline{V}^* \underline{Q} \underline{x}$  avec  $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$  .  
 (h) Preciser la dimension et expliciter les coefficients de  $\underline{V} {}^t \underline{V}^* \underline{Q} \underline{x}$  ; quel rapport avec :

$$\langle \underline{v}^{1*}, \underline{x} \rangle_Q + \langle \underline{v}^{2*}, \underline{x} \rangle_Q \quad (10.6)$$

- (i) Dans le cas o  $\underline{x}$  est dans le sous espace engendr par  $\underline{v}^1, \underline{v}^2$  que vaut  $\underline{V} {}^t \underline{V}^* \underline{Q} \underline{x}$  ?  
 (j) Montrer que  $\underline{x} - \underline{V} {}^t \underline{V}^* \underline{Q} \underline{x}$  est orthogonal  $\underline{v}^1, \underline{v}^2$  .

2. On considere la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 10. & 9. & 9. & 11. & 10. & 10. & 10. & 12. & 18. & 3. \\ 18. & 18. & 18. & 18. & 20. & 3. & 3. & 3. & 10. & 10. \\ 10.5 & 10. & 19. & 10. & 15. & 19. & 10. & 10. & 3. & 18. \end{bmatrix}$$

les lignes representent les notes de 10 tudians dans les matires suivantes : mathmatiques, conomie et anglais.

- (a) Dans une analyse en composantes principales du tableau  $\underline{A}$  avec une matrice  $\underline{Q} = \underline{Id}$ , de quelle matrice calcule-t-on les valeurs et vecteurs propres ?  
 (b) Comme tous les tudians ont le mme "poids", quelle matrice  $\underline{P}$  suggrez vous ?  
 (c) Donner les formules utiliser dans le logiciel **scilab** pour calculer la matrice demande questions plus haut et ses valeurs propres et vecteurs propres ;  
 (d) On trouve comme valeurs propres : 0.1757001; 0.0253222; 0.0989777 quelle est la qualit globale de la representation ?  
 (e) Indiquer les calculs effectuer et les formules utiliser dans le logiciel **scilab** pour obtenir la figure 10.10 dans le plan des vecteurs propres associs aux 2 plus grandes valeurs propres (le choix des 2 plus grandes valeurs propres est fait manuellement). On a represent les caractres avec un nombre ngatif et les individus avec un nombre positif .  
 (f) Interprter les nouveaux axes.  
 (g) discuter la position de quelques individus typiques.  
 (h) On considere une 4me matire EPS ; on choisit les coefficients diagonaux de  $\underline{Q}$  :  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.3$  et  $q_4 = .1$  ; reprendre la question (a) avec ces donnes.  
 (i) Reprendre la question(e).

FIG. 10.10 – classement avec 3 matieres

**Examen analyse de donnees, lic. MASS 2002-2003, janvier 03.** Notes manuscrites et polycopi du cours autoriss; caleulles interdites; soigner la presentation.

1. On considere les matrices suivantes :

$$\underline{\underline{A_1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{A_2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{A_3}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.7)$$

$$\underline{\underline{A_4}} = [ \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3 ] \quad \underline{\underline{A_5}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \\ 1 & -3 \\ -2 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{A_6}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \quad (10.8)$$

- (a) Indiquer dans un tableau tous les produits matriciels qui ont un sens; indiquer la taille de ces produits; indiquer aussi les produits qui n'ont pas de sens.
- (b) Effectuer 3 de ces produits matriciels.
2. Pour raliser une approximation par moindres carrs, on peut considerer d'autres fonctions qu'une droite  $a \rightarrow \alpha + \beta a$ , par exemple une parabole; on considere donc les 3 vecteurs  $\underline{\underline{A}} = [\underline{\underline{a^0}}, \underline{\underline{a}}, \underline{\underline{a^2}}]$  o  $\underline{\underline{a^0}} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\underline{\underline{a}} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\underline{\underline{a^2}} \in \mathbb{R}^m$  avec toutes les composantes de  $a$  distinctes,  $m \geq 4$ ,  ${}^t \underline{\underline{a^0}} = [1 \dots 1]$ ;  $\underline{\underline{a^2}}$  dsigne le vecteur dont les composantes sont les carrs des composantes de  $\underline{\underline{a}}$ ; dans la suite on dsigne par  $\underline{\underline{y}}$ , le vecteur "expliquer".
- (a) Montrer que la matrice  $\underline{\underline{A}}$  est de rang 3.
- (b) Ecrire une relation en scilab pour calculer  $\underline{\underline{a^2}}$  paetir de  $\underline{\underline{a}}$ .
- (c) On considere le vecteur  ${}^t \underline{\underline{a}} = [20 \ 30 \ 40 \ 50 \ 60 \ 70]$ , calculer le vecteur  $\underline{\underline{a^2}}$ .
- (d) On considere la fonction

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{j=1}^m q_j (y_j - \alpha a_j^0 - \beta a_j - \gamma a_j^2)^2 \quad (10.9)$$

avec tous les  $q_j > 0$ ; quelle est la condition ncessaire pour un minimum de  $F$ ?

- (e) Expliciter cette condition et faire apparatre un systme linair pour dterminer :  $\alpha, \beta, \gamma$ .
- (f) Vrifier que la matrice  $K$  de ce systme est gale  ${}^t \underline{\underline{A}} \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{A}}$  avec  $\underline{\underline{Q}} = \text{diag}(q_j)$ .
- (g) En dduire que cette matrice vrifie  ${}^t \underline{\underline{x}} K \underline{\underline{x}} > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ .
- (h) La solution du systme linair vrifie-t-elle une condition suffisante pour raliser le minimum de  $F$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
- (i) Pour  ${}^t \underline{\underline{y}} = [54 \ 90 \ 138 \ 206 \ 292 \ 396]$ , on trouve  $\alpha = -0.91$   $\beta = 0.92$   $\gamma = 0.066$ , dessiner ces donnees et cette parabole des moindres carrs. Tracer main leve la droite des moindres carrs et comparer.
3. On considere les individus :

$$A = [-2 \quad -1 \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 7 \quad 8] \quad (10.10)$$

Le tableau ci-dessous fournit une approximation numrique des barycentres (calculs avec des poids gaux)  $\overline{a_{i,j}}$  de  $a^i \dots a^j$  avec valeur nulle si  $j < i$ .

-2.000	-1.500	-0.667	0.500	1.600	2.500	3.286
0.000	-1.000	0.000	1.333	2.500	3.400	4.167
0.000	0.000	1.000	2.500	3.667	4.500	5.200
0.000	0.000	0.000	4.000	5.000	5.667	6.250
0.000	0.000	0.000	0.000	6.000	6.500	7.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	7.000	7.500
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	8.000

(10.11)

Le tableau ci-dessous donne une approximation des inerties  $I_{i,j}$  de  $a^i \dots a^j$  utilisés dans l'algorithme de Fischer ; ainsi  $I_{1,3} = 1.566$

0.000	0.250	1.556	5.250	9.040	11.583	13.633
0.000	0.000	1.000	4.222	7.250	9.040	10.472
0.000	0.000	0.000	2.250	4.222	5.250	6.160
0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.556	2.188
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.250	0.667
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.250
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

(10.12)

Le tableau ci-dessous, fournit une approximation les sommes  $I_{i,d} + I_{d+1,7}$

10.472	6.410	3.743	5.917	9.290	11.583
0.000	6.160	3.188	4.889	7.500	9.040
0.000	0.000	2.188	2.917	4.472	5.250
0.000	0.000	0.000	0.667	1.250	1.556
0.000	0.000	0.000	0.000	0.250	0.250
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

(10.13)

- (a) Interpréter les zéros de ces 3 tableaux et vérifier 3 coefficients non nuls.
- (b) De ces tableaux, déduire la meilleure partition en 2 classes par l'algorithme de Fischer.
- (c) Déterminer ensuite les meilleures partitions en 2 classes des ensembles  $a^i \dots a^7$ .
- (d) Déterminer la meilleure partition en 3 classes des individus proposés.
- (e) En partant de la partition  $(-2), (-1 \ 1 \ 4) (6 \ 7 \ 8)$ , utiliser l'algorithme des nues dynamiques.
- (f) Comparer les inerties des partitions trouvées avec les 2 algorithmes.

**Examen analyse de donnes, lic. MASS 2002-2003, septembre 03.**

*Notes manuscrites et polycopi du cours autoriss ; calculettes interdites ; soigner la prsentation.*

1. Soit  $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$  une variable expliquer et  $\underline{a}^1 \in \mathbb{R}^m$  une variable explicative ; les poids  $q_j > 0$  vrifient :  $\sum_{j=1}^m q_j = 1$  et l'on note  $Q = \text{diag}(q_j)$

(a) Notons  $\text{cov}(\underline{y}, \underline{a}^1) = \langle \underline{y}, \underline{a}^1 \rangle_Q - \bar{y} \bar{a}^1$  avec le produit scalaire  $\langle \underline{y}, \underline{a}^1 \rangle_Q = \sum_{j=1}^m y_j q_j a_j^1$  et la moyenne  $\bar{y} = \langle \underline{y}, \underline{a}^0 \rangle_Q$  avec  ${}^t \underline{a}_0 = [1, \dots, 1]$  et idem pour les autres vecteurs considrs. Dmontrer que  $\text{cov}(\underline{y}, \underline{a}^1) = \langle \underline{y} - \bar{y} \underline{a}^0, \underline{a}^1 - \bar{a}^1 \underline{a}^0 \rangle_Q$

(b) Rappeler l'expression des 2 coefficients  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  de la droite des moindres carrs ( droite de rgression) :  $\underline{y}^* = \alpha_0 \underline{a}^0 + \alpha_1 \underline{a}^1$  avec :  ${}^t \underline{a}_0 = [1, \dots, 1]$  où l'on note  ${}^t$  la transpose d' une matrice ou d'un vecteur.

(c) En notant  $\text{var}(\underline{y}) = \text{cov}(\underline{y}, \underline{y})$ , en dduire que

$$\text{var}(\underline{y}) = \text{var}(\underline{y} - \underline{y}^*) + \text{var}(\underline{y}^*) + 2\text{cov}(\underline{y} - \underline{y}^*, \underline{y}^*) \tag{10.14}$$

(d) Montrer que  $\text{cov}(\underline{y} - \underline{y}^*, \underline{y}^*) = 0$

(e) Montrer que  $\text{var}(\underline{y}^*) = \frac{\text{cov}(\underline{a}^1, \underline{y})^2}{\text{var}(\underline{a}^1)}$

(f) En dduire :  $\text{var}(\underline{y}) = \text{var}(\underline{y} - \underline{y}^*) + \rho(\underline{a}^1, \underline{y})^2 \text{var}(\underline{y})$

(g) A l'aide de la formule prcdente donner une nouvelle justification du critre retenu en cours pour la qualit de la rgression.

(h) On considere le tableau des 2 variables : population totale (variable explicative) et population active (variable expliquer) de quelques pays en 1970 :

pays	population	actifs
Etatsunis	204.8	78.62
Japon	103.5	50.94
Allemagne	61.5	26.7
Angleterre	55.8	24.7
France	50.7	20.41
Italie	54.4	18.77
Canada	21.4	7.87
Paysbas	13.0	4.56
Belgique	9.67	3.74

Dessiner main leve ces points sur un graphique avec la droite des moindres carrs

(i) On a  $\rho(\underline{a}^1, \underline{y}) = 0.988$  ; prciser la qualit de la rgression.

2. On considere la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \text{rev/educ} & \text{non reponse} & \text{scol.obligat.} & \text{cap/bep} & \text{bepc} & \text{bac} & \text{superieur} \\ \text{non reponse} & 54 & 134 & 70 & 51 & 65 & 66 \\ < 4000 & 5 & 66 & 29 & 15 & 14 & 17 \\ 4000 - 7000 & 16 & 155 & 127 & 53 & 82 & 48 \\ 7000 - 10000 & 7 & 75 & 107 & 41 & 74 & 102 \\ 10000 - 20000 & 3 & 30 & 62 & 29 & 80 & 147 \\ 20000 - 30000 & 0 & 6 & 4 & 1 & 4 & 24 \\ > 30000 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Cette matrice correspond des effectifs lors d'une enquete effectue sur les diplmes et revenus d'un chantillon de population. On a ralis une *analyse factorielle des correspondances*. On a trac le dessin ci dessous dans le plan des 2 premiers vecteurs propres des matrices de covariance.

(a) Indiquer brievement de quelles matrices il s'agit ;

- (b) Comment calculer ces matrices (calcul effectif non demand) ;  
 (c) Comment calculer valeurs propres et vecteurs propres (calcul effectif non demand) ;  
 (d) On a les correspondances suivantes entre les nombres represents sur le graphique et leur signification pour l'enquete :

$$\begin{array}{cccccc} \left[ \begin{array}{cccccc} \textit{non reponse} & \textit{scol.obligat.} & \textit{cap/bep} & \textit{bepc} & \textit{bac} & \textit{superieur} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \right] \\ \\ \left[ \begin{array}{cccccc} \textit{non reponse} & < 4000 & 4000 - 7000 & 7000 - 10000 & 10000 - 20000 & 20000 - 30000 & > 30000 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 \end{array} \right] \end{array}$$

Interprter le premier axe obtenu sur le dessin ;

- (e) Quelles conclusions (sur les revenus et diplmes) relatives l'enquete pouvez vous tirer de l'analyse factorielle des correspondances ?

FIG. 10.11 – revenus et scolarité

3. (a) On considere le plan  $M$  de  $\mathbb{R}^3$  engendr par les vecteurs  $v^1$   $v^2$  de composantes :

$$[v^1 \ v^2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \epsilon & \epsilon \end{bmatrix}$$

Calculer la matrice de la projection orthogonale sur le plan  $M$ .

- (b) Dans le cas  $\epsilon = 0$ , que trouvez vous ? Interpretation.

**Examen analyse de données, lic. MASS 2003-2004, janvier 03.** Notes manuscrites et photocopi du cours autorisés; calculatrices autorisées, micro-ordinateurs interdits; soigner la présentation.

1. (a) On considère, dans l'espace à 3 dimensions, le plan passant par le point  $a = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et parallèle aux 2

vecteurs  $[v_1 \ v_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Vérifier que ce système est libre. Donner une équation paramétrique de ce plan.

- (b) En déduire le système linéaire qui fournit les composantes dans la base  $[v_1, v_2]$  de  $x - a$  avec  $x$ , projection orthogonale du vecteur  $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) Vérifier votre résultat.

2. (a) On considère le tableau  $A$  de 6 individus et 3 caractères :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

On suppose que tous les individus ont le même poids et l'on met des poids unitaires sur les lignes (caractères) :  $\underline{Q} = \underline{Id}$ .

(b) Quelle matrice  $\underline{P}$  suggérez-vous ?

(c) Déterminer le barycentre des colonnes.

(d) Calculer la matrice centre  $\underline{D}$ .

(e) Dans une analyse en composantes principales du tableau  $\underline{A}$  avec une matrice  $\underline{Q} = \underline{Id}$ , de quelle matrice  $\underline{C}$  calcule-t-on les valeurs et vecteurs propres ?

(f) Vérifier que 0 est valeur propre de  $\underline{C}$  et qu'un vecteur propre est :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(g) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres  $\underline{u}^j$  de  $\underline{C}$ .

(h) Calculer les projections utilisées dans une analyse en composantes principales avec 2 vecteurs propres.

(i) Écrire un programme en Scilab qui calcule ces projections.

(j) Dessiner ces projections.

(k) Qualité globale de la représentation.

(l) Préciser les nouveaux caractères (caractères dans la base de vecteurs propres)  $({}^t \underline{u}^j \underline{Q} \underline{D})$ .

(m) Calculer les cosinus entre les anciens caractères  ${}^t e_j \underline{D}$  et les nouveaux caractères (coefficients de corrélation).

(n) Dessin et commentaires.



**Examen analyse de données, lic. MASS 2003-2004**, septembre 2004.

Notes manuscrites et polycopié du cours autorisés ; calculatrices interdites ; soigner la présentation et la rédaction.

1. (a) On considère le plan  $M$  de  $\mathbb{R}^3$  engendré par les vecteurs  $v^1$   $v^2$  de composantes :

$$[v^1 \ v^2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculer la matrice de la projection orthogonale sur le plan  $M$ .

- (b) Donner une équation paramétrique du plan affine  $M_a$  parallèle au plan  $M$  passant par le point  $a = {}^t[1, 1, 1]$ .  
 (c) Calculer la projection du point  $a$  sur le plan vectoriel  $M$ .  
 (d) Calculer le pivot de  $M_a$ .  
 (e) Déterminer la projection de l'origine sur  $M_a$ .  
 (f) Calculer l'inertie de  $A = [a^1 \ a^2]$  par rapport  $M_a$  avec les poids  $p^1 = p^2$  avec la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. On considère la matrice suivante

$$N = \begin{bmatrix} 20 & 20 & 1 & 1 & 2 & 18 & 9 \\ 20 & 10 & 20 & 10 & 9 & 3 & 17 \\ 20 & 1 & 10 & 20 & 16 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Les lignes représentent les notes obtenues par 7 étudiants en mathématiques, économie, comptabilité ; chaque colonne fournit les 3 notes de chaque étudiant.

- (a) Pourquoi ce tableau est-il susceptible d' une analyse factorielle des correspondances ?  
 (b) Calculer (éventuellement en partie) la matrice des profils des colonnes.  
 (c) Calculer (éventuellement en partie) la matrice des profils des lignes.  
 (d) Lors d' une analyse factorielle des correspondances, donner une équation paramétrique du plan sur lequel on projette (aucune valeur numérique n' est demandée).  
 (e) Que dessine-t-on en pratique ?  
 (f) La figure 10.12 représente les projections des étudiants et des 3 matières sur le plan précisé ci dessus. Donner un programme scilab pour le calcul de ces projections  
 (g) Interpréter les correspondances relevées sur le graphique.  
 (h) Interpréter les axes.

FIG. 10.12 –

3. On considère les matrices suivantes :

$$\underline{\underline{A_1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{A_2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{A_3}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.15)$$

$$\underline{\underline{A_4}} = [ \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3 ] \quad \underline{\underline{A_5}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \\ 1 & -3 \\ -2 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{A_6}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \quad (10.16)$$

- (a) Indiquer dans un tableau tous les produits matriciels qui ont un sens ; indiquer la taille de ces produits ; indiquer aussi les produits qui n'ont pas de sens.
- (b) Effectuer 3 de ces produits matriciels.

# Bibliographie

- [1] J.P. Cabannes. site. <http://www.chez.com/deaecodemo/>.
- [2] J. de Lagarde. *site : Initiation l'analyse des données*. Dunod, 1995.
- [3] Pouget Testu Diday, Lemaire. *Elements d'analyse de données*. Dunod, 1982.
- [4] M. de Lara J-Ph Chancelier. Introduction scilab, manipulations vectorielles. [cermics.enpc.fr/scilab](http://cermics.enpc.fr/scilab), 2005.
- [5] M. Jambu. *Méthodes de base de l'analyse de données*. Eyrolles, 1999.
- [6] L. Lebart. site. <http://www.enst.fr/egsh/lebart/>.
- [7] B. Perrin. Wims paris-sud. <http://wims.auto.u-psud.fr/>.
- [8] Inria.
- [9] Ressources scientifiques pour les enseignants de mathématiques. <http://www.dma.ens.fr/culturemath/>.
- [10] Université en ligne. Site internet, <http://www.uel-pcsm.education.fr>.
- [11] [//www.octave.org](http://www.octave.org).
- [12] G. Xiao. Wims. <http://wims.unice.fr>.

# Index

vecteur normal, 8

Chasles, 6

equation parametrique, 8

Vecteur directeur, 8